OVERSIGT OVER DET KGL. DANSKE VIDENSKABERNES SELSKABS FORHANDLINGER. 1911. N° 5

CONTRIBUTION A LA GÉOMÉTRIE INFINITÉSIMALE DE LA COURBE RÉELLE

PAR

J. HJELMSLEV

Introduction.

A l'heure actuelle la géométrie infinitésimale de la courbe réelle se base essentiellement sur deux ordres de recherches différents: l'un relatif à la théorie des ensembles; l'autre ayant trait à la théorie de la fonction continue réelle. Grâce au premier, on est arrivé à exprimer d'une manière précise la notion de courbe et les relations entre ce concept et les autres ensembles de points. La seconde catégorie de recherches qui a pour objet la théorie de la fonction continue réelle, nous permet d'examiner immédiatement les arcs coupés, en un point au plus, par toute droite d'un sens fixe déterminé. Cependant, tout importants qu'ils soient, les fondements fournis par ces deux catégories de recherches ne suffisent pas comme base de la théorie des courbes. Considérons par exemple les courbes planes ayant en chacun de leurs points une tangente déterminée et dont les deux demi-tangentes sont de sens contraires: il est clair qu'ici la théorie de la fonction réelle différentiable n'apporte à la géométrie des courbes en question que des contributions d'un ordre très spécial.

Supposons que dans une courbe plane le point courant (x, y) soit défini par les égalités $x = \varphi(t)$, $y = \psi(t)$, φ et ψ

étant des fonctions réelles, continues et uniformes d'une variable réelle t, de sorte que tout point de la courbe soit individualisé par la valeur de t, et que les points voisins du point considéré de la courbe se trouvent déterminés par l'intervalle infiniment petit qui comprend t à son intérieur; on pourra exprimer le fait que la courbe a, en t, une tangente déterminée, en disant que l'expression

$$\lim_{h=0} \frac{\psi(t+h)-\psi(t)}{\varphi(t+h)-\varphi(t)}$$

représente une quantité bien déterminée pour chacune des valeurs considérées de t.

Mais, d'abord, cela ne veut pas dire nécessairement que φ et ψ soient différentiables et, en outre, la difficulté qu'on éprouve à établir un rapport direct entre la théorie de la fonction différentiable et celle de la courbe considérée n'est pas seulement d'ordre formel. Il est vrai que dans les cas où φ (ou ψ) est une fonction toujours croissante (ou toujours décroissante) on peut, en introduisant φ (ou ψ) comme une nouvelle variable indépendante, réduire le problème de l'existence de la valeur limite considérée à celle de l'existence d'une dérivée. Mais une telle transformation de variable n'aurait pas de sens, φ ni ψ ne satisfaisant à la condition indiquée (pas même par intervalles). Et cela suffit pour nous montrer que la théorie de l'arc ordinaire à tangente déterminée représente déjà une généralisation considérable de la théorie de la fonction différentiable. Aussi, quels que soient les parallélismes qu'on arrive à constater entre les propositions fondamentales sur l'arc et celles qui ont trait à la fonction, on devra pourtant se rappeler que le premier groupe de théorèmes représentent tous des extensions des théorèmes relatifs à la fonction.

Quant à l'origine des propositions fondamentales sur la fonction réelle, elles semblent bien être dues à l'immédiate intuition géométrique. C'est en cherchant à formuler analytiquement des données obtenues par voie intuitive qu'on s'est procuré les moyens exacts de la démonstration, et une fois que la proposition eut pris la forme d'un théorème sur la fonction réelle on a fini par supprimer toute allusion à l'intuition géométrique, et cela tant dans la formulation que dans la démonstration.

On n'essaya pas de formuler exactement le contenu même de l'intuition géométrique. Aussi bien une telle tentative aurait-elle présenté des difficultés considérables. Elle n'a été rendue possible que par les recherches plus récentes sur la théorie des ensembles et les fondements ultérieurs des mathématiques. Et si maintenant nous tâchons de rendre aux théorèmes et à leurs démonstrations une forme géométrique nous ne ramenons pas seulement ainsi les problèmes à leur origine première, nous en élargissons en même temps considérablement la portée.

La présente note traite essentiellement des arcs plans ayant en chacun de leurs points une tangente déterminée et dont les demi-tangentes sont opposées; ces arcs sont appelés arcs ordinaires.

Au § 1 nous définissons un auxiliaire important pour ces recherches, à savoir: le *domaine convexe* (et le *diagramme*) d'un ensemble de points.

Au § 2 on trouvera énoncées certaines propositions géométriques concernant les courbes rectifiables, propositions qui se déduisent directement de théorèmes analytiques bien connus.

Le § 3 contient la définition de l'arc ordinaire et des différentes espèces de points situés sur l'arc.

Suivent, au § 4, les extensions géométriques du théorème sur la valeur moyenne.

Après ces préliminaires nous abordons le sujet principal de cette étude: les propriétés générales de l'arc ordinaire. Voici, en résumé, les plus importants résultats de notre recherche:

L'arc ordinaire le plus général qui n'a pas de segments, peut être construit par la composition d'un ensemble dénombrable de deux espèces d'éléments essentiellement différents: l'arc convexe et l'arc nulle part convexe. Le premier est bien connu; le dernier a ceci de caractéristique de contenir un ensemble partout dense de *points d'inflexion* (points où la tangente partage le voisinage du point en deux parties séparées) et un ensemble partout dense de *points d'ondulation* (points où la tangente a une infinité de points en commun avec le voisinage du point).

Tout arc ordinaire, exempt de segments, contient un ensemble partout dense de *points convexes* (points où la tangente n'a que le point lui-même en commun avec le voisinage du point et ne partage pas ce voisinage en parties séparées).

Tout arc ayant en chacun de ses points une tangente déterminée; ne présentant pas de segments; et possédant un nombre fini de singularités simples (points doubles, points de rebroussement, points d'inflexion, points anguleux), se compose nécessairement d'un nombre fini d'arcs convexes; par conséquent il aura généralement des tangentes variant d'une façon continue et des cercles osculateurs déterminés.

Tout arc ordinaire n'ayant une infinité de points en commun avec aucune droite, doit se composer d'un ensemble fini ou dénombrable d'arcs convexes et des points limite de ceux-ci.

Au § 9 on trouvera énoncés des théorèmes relatifs aux *sécantes limites* des courbes de Jordan (en entendant par la sécante limite, en P, d'une telle courbe: toute position limite d'une droite joignant deux points de la courbe convergeant vers P de côtés opposés). A l'aide de ces recherches nous arrivons, au § 10, à rendre compte des propriétés essentielles des courbes qui n'ont chacune qu'un nombre fini de sécantes limites passant par les points du plan. Nous établissons que les courbes en question sont ordinaires; qu'elles coupent les droites qu'elles rencontrent en un nombre fini de points; qu'elles se composent d'un ensemble dénombrable d'arcs convexes; que chacune de leurs tangentes est coupée, au point de contact, par la tangente consécutive.

Une remarque finale attire l'attention sur les applications à faire du principe de dualité. En effet, ce principe est ici d'un intérêt tout particulier, la catégorie de courbes considérée n'étant pas autodualistique d'une façon générale.

En dehors de l'intérêt que peuvent offrir en soi les résultats de la présente étude, je ferai remarquer qu'ils serviront de base à des recherches ultérieures sur les courbes dans l'espace à trois ou plusieurs dimensions.

§ 1. Le domaine convexe d'un ensemble de points.

Un auxiliaire qui joue un rôle important dans beaucoup de recherches récentes est le domaine convexe, c'est-à-dire un domaine tel que le segment qui joint deux quelconques des points de ce domaine, y soit contenu tout entier. Pour ce qui est de la théorie générale du domaine convexe et des problèmes qui s'y rattachent, nous nous contenterons de renvoyer le lecteur aux recherches déjà publiées par MM. Brunn[1], Minkowski[2], Jensen[3] et par l'auteur du présent mémoire[4]; dans ce qui suit nous allons nous occuper plus particulièrement de ce que nous appellerons le domaine convexe $\Omega_{\mathfrak{M}}$ appartenant à un ensemble de points arbitraire $\mathfrak{M}$, ou bien, pour abréger, e *domaine convexe de l'ensemble.*

D'un ensemble de points donné $\mathfrak{M}$, nous pouvons déduire un autre en joignant, deux à deux, par des segments, tous

[1] Brunn, Ueber Ovale und Eiflächen, Diss. Munich 1887; Ueber Curven ohne Wendepunkte, Habilitationsschrift. Munich 1889; Referat über eine Arbeit, Sitzungsber. d. bayer. Akad. 1894, XXIV, p. 93—111.

[2] Minkowski, Geometrie d. Zahlen. Leipzig 1896, 1910.

[3] Jensen, Om konvekse Funktioner og Uligheder mellem Middelværdier, Nyt Tidsskr. f. Mat. 1905, p. 9 et Acta mathematica XXX, p. 175.

[4] Hjelmslev, Om konvekse Omraader, Nyt Tidsskr. f. Mat. 1905, p. 81.

les points de l'ensemble de toutes les manières possibles. Les points contenus dans ces segments constituent un ensemble $\mathfrak{M}_1$ où l'ensemble $\mathfrak{M}$ se trouve compris et que nous appellerons l'extention linéaire de $\mathfrak{M}$. Ensuite nous pouvons former de $\mathfrak{M}_1$ une extension linéaire $\mathfrak{M}_2$ et ainsi de suite. Les points contenus dans toutes ces extensions linéaires successives formeront (en ne tenant compte de chacun des points qu'une seule fois) un domaine convexe, chacun des segments qui joignent deux de ces points faisant partie du domaine. Et le domaine ainsi constitué $\Omega_{\mathfrak{M}}$ est celui que nous appellerons le domaine convexe de l'ensemble considéré.

Dans cette note, nous n'envisagerons que des ensembles $\mathfrak{M}$ fermés; $\Omega_{\mathfrak{M}}$ sera donc également fermé et par conséquent il comprendra sa propre frontière.

Dans le cas d'un ensemble de points $\mathfrak{M}$ contenu dans un espace d'un nombre fini de dimensions, le nombre des extensions successives nécessaires pour arriver à $\Omega_{\mathfrak{M}}$ sera toujours fini. Notons toutefois que ce nombre des extensions requises ne dépend pas seulement de celui des dimensions de l'espace: il constitue l'une des caractéristiques essentielles de l'ensemble.

Un ensemble situé dans le plan ou dans l'espace à trois dimensions et comprenant un nombre fini de points (qui ne soient pas tous en ligne droite), se transforme, moyennant deux extensions linéaires, en son domaine convexe; et la même chose peut s'énoncer pour tout ensemble de points $\mathfrak{M}$ du plan ou de l'espace, chaque point de $\Omega_{\mathfrak{M}}$ pouvant être considéré comme construit à l'aide d'un nombre fini d'extensions linéaires d'un nombre fini de points compris dans $\mathfrak{M}$.

Cependant, l'ensemble de points peut être composé de telle sorte qu'il suffit d'une seule extension pour obtenir le domaine convexe de l'ensemble (même si l'ensemble en question ne contient pas de segment). Dans le cas d'un ensemble de points plan, nous pouvons par exemple énoncer le théorème suivant:

Théorème 1. — Tout ensemble de points parfait et d'un seul tenant qui se trouve contenu dans le plan, se transforme en un domaine convexe moyennant une seule extension linéaire.

Démonstration. — Tout point P situé dans le domaine convexe de l'ensemble et qui n'appartient pas à l'ensemble donné, peut s'obtenir comme point intérieur à un triangle ABC dont les sommets font partie de l'ensemble en question, ou bien comme point situé sur le périmètre d'un tel triangle. En effet, d'après ce qui a été dit plus haut, P peut en tout cas s'obtenir à l'aide de deux extensions d'un nombre fini des points de l'ensemble, en d'autres termes: P doit être situé dans un polygone convexe dont les sommets fassent partie de l'ensemble; par conséquent il sera intérieur à un triangle satisfaisant à la même condition. Il s'agit maintenant de prouver qu'au cas où il n'est pas sur le périmètre du triangle, P fait nécessairement partie d'un segment joignant deux des points de l'ensemble. Qu'il en soit ainsi, nous le pouvons conclure de ce fait que toutes les demi-droites qui projettent de P l'ensemble parfait et d'un seul tenant que nous nous sommes donné, forment de leur côté un ensemble parfait et d'un seul tenant de demi-droites, et ce dernier ensemble comprenant les trois demi-droites PA, PB et PC qui ne sont contenues dans aucun angle convexe, doit remplir un angle non convexe (et spécialement le plan tout entier), donc il comprendra toujours deux demi-droites opposées l'une à l'autre. Or ces deux demi-droites contiendront chacune un point au moins de l'ensemble donné, de sorte que P se trouvera situé dans un segment, au moins, qui joint deux points de l'ensemble.

Pour construire le domaine convexe $\Omega_{\mathfrak{M}}$ d'un ensemble de points $\mathfrak{M}$ plan arbitraire, le procédé le plus simple consistera en règle générale à déterminer la frontière du domaine, par quoi le domaine lui-même se trouvera immédiatement déterminé. Tout point de $\Omega_{\mathfrak{M}}$ (que ce point soit situé à l'intérieur du domaine ou sur sa frontière) appartiendra soit à l'intérieur soit au périmètre d'un triangle ABC dont les sommets font partie de $\mathfrak{M}$. Pour que P puisse être situé sur la frontière de $\Omega_{\mathfrak{M}}$ il faut donc qu'il se trouve sur le périmètre du triangle c'est-à-dire sur l'un des segments BC, CA ou AB. Par conséquent, il fera partie de la première extension de l'ensemble. Donc:

Théorème 2. — Dans tout ensemble de points plan la frontière du domaine convexe fait nécessairement partie de la première extension linéaire de l'ensemble.

Le domaine convexe appartenant à un ensemble de points plan quelconque sera donc limité, soit exclusivement par des points compris dans l'ensemble et situés chacun sur une droite, au moins, limitant un demi-plan où se trouve contenu l'ensemble, — soit partie par des points de cette catégorie et partie par des segments qui les joignent deux à deux. Dans le dernier cas, la droite qui contient un tel segment limitera un demi-plan contenant tout l'ensemble de points. Le domaine convexe peut être désigné comme le domaine commun de tels demi-plans qui contiennent l'ensemble tout entier et dont les droites limite contiennent chacune un point, au moins, de l'ensemble.

Dans le cas d'un ensemble de points à trois dimensions la frontière du domaine convexe sera constituée de manière analogue; ici la frontière comprendra: 1° tout point de l'ensemble, par lequel passe un plan au moins limitant un demi-espace contenant l'ensemble; 2° tout segment joignant deux points de l'ensemble situés dans un plan au moins de la catégorie ci-dessus indiquée; et 3° tout domaine convexe plan qui puisse résulter de l'extension des points de l'ensemble situés dans un plan limite d'un des demi-espaces ci-dessus indiqués. Il est facile, en généralisant cette construction, de la rendre applicable aux espaces de plusieurs dimensions.

De même qu'à un ensemble de points donné $\mathfrak{M}$ correspond un domaine convexe déterminé $\Omega_{\mathfrak{M}}$, de même on peut, en partant d'un domaine convexe donné, trouver un ensemble de points susceptible de donner après extensions linéaires le domaine considéré. Il va sans dire que ce problème a une infinité de solutions. Cependant, en exigeant que l'ensemble de points demandé ne contienne pas de sous-ensemble ayant le même domaine convexe que l'ensemble, on obtient un ensemble de points déterminé qui s'appelle le diagramme du domaine considéré.

Le diagramme est formé de points tels que tout en étant points frontière du domaine ils ne sont pas points intérieurs des segments qui font partie de la frontière. Le diagramme d'un polygone convexe est l'ensemble de tous ses sommets. Le diagramme d'un secteur de cercle convexe se compose du centre et de la partie interceptée de la circonférence du cercle. Le diagramme d'un tronc de cône convexe est constitué par les circonférences des deux surfaces limite, ces deux circonférences étant supposées ne pas contenir de segment.

Dans le cas d'un domaine convexe dont la frontière ne contient pas de segment, le diagramme se confond avec la frontière.

Pour abréger, nous appellerons le diagramme du domaine convexe $\Omega_{\mathfrak{M}}$ d'un ensemble donné $\mathfrak{M}$ le diagramme de l'ensemble.

Théorème 3. — Tout diagramme est nécessairement un ensemble de points fermé.

Supposons en effet que le diagramme contienne une serie fondamentale $P_1\ P_2 \ldots$ ayant le point limite P. Une telle série fera nécessairement partie de la frontière du domaine convexe appartenant au diagramme, et, par conséquent, le point limite sera sur cette frontière. Or P ne saurait être point intérieur d'un segment contenu dans la frontière sans que ce segment contienne une infinité des points qui constituent la série fondamentale — ce qui n'est pas possible, ces points faisant tous partie du diagramme. Il faut donc que P soit également contenu dans le diagramme, et notre théorème est démontré.

Un arc plan est dit convexe quand il est contenu tout entier dans la frontière de son domaine convexe. Il a ou deux points, au plus, ou bien tout un segment en commun avec une droite arbitraire, et en chacun de ses points il a des deux côtés une tangente déterminée.

L'arc convexe a une autre propriété importante. On sait en effet que tout arc convexe, ayant en chacun de ses points une tangente déterminée, peut être représenté (par fragments au moins) à l'aide d'une équation de la forme $y = f(x)$, où $f(x)$ est une fonction convexe[1] à dérivée finie déterminée $f'(x)$. Cette dérivée est une fonction continue monotone, et, en vertu d'un théorème de LEBESGUE[2], une telle fonction est généralement différentiable, l'ensemble de points pour lequel la dérivée n'existe pas étant en tout cas de mesure nulle. Donc, en général $f''(x)$ existera, et de là résulte:

Théorème 4. — Un arc convexe ayant en chacun de ses points une tangente déterminée a, en général, en un point arbitraire, un cercle osculateur déterminé.

Remarquons toutefois que les points qui n'ont pas de cercle osculateur déterminé peuvent former un ensemble partout dense sur l'arc.

§ 2. Les arcs rectifiables.

Une classe d'arcs de courbes très importante et très vaste est celle des arcs rectifiables, c'est-à-dire des arcs de longueur finie. En représentant un arc plan par des équations de la forme $x = \varphi(t)$, $y = \psi(t)$, où φ et ψ sont des fonctions uniformes réelles, continues et finies, d'une variable réelle t par-

[1] JENSEN, ouv. cit.

[2] LEBESGUE, Leçons sur l'Intégration, Paris 1904, p. 128.

courant un intervalle déterminé donné, on sait, d'après JORDAN[1], que la condition nécessaire et suffisante pour que l'arc en question soit rectifiable c'est que, dans l'intervalle considéré, φ et ψ soient de variation bornée. Toute fonction de ce genre peut s'écrire comme différence de deux fonctions monotones, toujours croissantes.

A l'aide d'une simple transcription de cet énoncé nous pouvons déduire une construction géométrique de l'arc rectifiable. Mettons que l'arc soit représenté par les équations:

$$x = \varphi_1(t) - \varphi_2(t),$$
$$y = \psi_1(t) - \psi_2(t),$$

où $\varphi_1, \varphi_2, \psi_1, \psi_2$ désignent des fonctions monotones, toujours croissantes, et considérons trois points P, Q, R aux coordonnées (x_1, y_1), (x_2, y_2), (x_3, y_3) déterminées par les expressions:

$$x_1 = y_1 = 3(\varphi_1(t) + \psi_1(t)),$$
$$x_2 = -3(\varphi_2(t) + \psi_1(t)), \quad y_2 = 0,$$
$$x_3 = 0, \quad y_3 = -3(\varphi_1(t) + \psi_2(t));$$

on aura les équations:

$$x = \varphi_1(t) - \varphi_2(t) = \frac{x_1 + x_2 + x_3}{3},$$

$$y = \psi_1(t) - \psi_2(t) = \frac{y_1 + y_2 + y_3}{3},$$

qui nous montrent que le point (x, y) est le centre de gravité du triangle PQR. Or les expressions des coordonnées des trois points P, Q, R montrent que ces points se meuvent sur les trois droites $x = y$, $y = 0$, $x = 0$ et que les mouvements des points sur ces droites sont monotones (vont toujours dans le même sens). Donc:

Théorème 5. — Tout arc rectifiable plan peut être construit comme lieu géométrique du centre de gravité d'un triangle dont les sommets se meuvent d'une façon monotone sur trois droites passant par un même point.

[1] JORDAN, Cours d'Analyse I, 2e éd., 1893, p. 100.

Le fait que les sommets du triangle ont des mouvements monotones pourrait encore s'exprimer en disant que les ponctuelles parcourues correspondent deux à deux d'une manière bi-univoque et continue.

Il est facile de généraliser ce théorème de manière à le rendre valable pour les espaces à trois ou plusieurs dimensions.

Toutes les fonctions à variation bornée forment un domaine de rationalité, les opérations rationnelles effectuées avec les fonctions de ce genre conduisant toujours — si tant est qu'elles ne font naître que des fonctions bornées — à de nouvelles fonctions à variation bornée. [1]

De là nous pouvons tirer une conclusion très importante par ses applications géométriques: en faisant subir aux arcs rectifiables des transformations rationnelles on obtient de nouveau des arcs rectifiables à moins que ce ne soient des arcs se prolongeant à l'infini. De ceci résultent immédiatement les propositions suivantes:

Par projection centrale, un arc rectifiable se transforme en un nouvel arc, rectifiable celui-là dans le fini.

Une courbe construite comme lieu géométrique du point de concours des droites correspondantes dans deux faisceaux de droites correspondant entre eux d'une manière bi-univoque et continue, est rectifiable (dans le fini).

Un arc construit comme courbe d'intersection de deux surfaces coniques aux courbes directrices rectifiables est, lui aussi, rectifiable.

Ces théorèmes, — et on pourrait compléter la liste avec bien d'autres, dont beaucoup d'une portée encore plus étendue —, suffisent pour montrer que les arcs rectifiables forment une classe de courbes à part.

Il convient d'ajouter le théorème très important de

[1] Jordan, Cours d'Analyse I, 1893, p. 57.

LEBESGUE[1] énonçant que l'arc rectifiable a, en général, une tangente déterminée en chacun de ses points. Nous avons déjà eu l'occasion de préciser le sens qu'il faut attribuer à la restriction contenue dans les mots: *en général,*

Énonçons encore à titre de théorèmes spéciaux relatifs aux arcs rectifiables:

Théorème 6. — Tout arc plan contenu dans un domaine convexe fini Ω et dont les sécantes coupent toutes un autre domaine convexe Ω' n'ayant pas de point en commun avec Ω et ne formant pas précisément un demi-plan, est nécessairement rectifiable.

La distance qui sépare un point de Ω d'un point de Ω' a un minimum déterminé atteint en un endroit au moins situé entre un point A sur la frontière de Ω et un point B sur la frontière de Ω'. Les perpendiculaires à AB en A et en B limitent une région qui sépare les deux domaines. Choisissons, entre A et B, un point C; menons, par C, la perpendiculaire c à AB. Les demi-droites qui joignent C au points de Ω remplissent un angle convexe situé tout entier d'un côté de c et n'ayant pas de demi-droite limite contenue dans cette ligne, tandis que les demi-droites qui joignent C aux points de Ω' remplissent un angle convexe situé de l'autre côté de c et n'ayant pas de demi-droite limite contenue dans c. On pourra donc mener par C une droite c_1, différente de c et qui ne passe par, ni ne limite, aucun des angles ci-dessus indiqués. Les deux domaines Ω et Ω' se trouveront alors situés de côtés opposés de c et de c_1. Une droite parallèle de c ou de c_1 et qui passe par le domaine Ω ne saurait passer par Ω', une telle ligne a donc, au plus, un point en commun avec l'arc considéré, En projetant les points de l'arc par deux faisceaux de droites parallèles à c et à c_1 respectivement, ces

[2] LEBESGUE, Leçons sur l'Intégration, Paris 1904, p. 127. Une autre démonstration a été donnée par G. FABER (Über stetige Funktionen; Math. Ann., t. 69, p. 393).

faisceaux correspondront par conséquent l'un à l'autre d'une façon bi-univoque et continue, donc l'arc est rectifiable.

§ 3. L'arc ordinaire.

Dans ce qui suit nous entendrons par *arc*, dit sans réserves expresses, un arc au sens de Jordan, exempt de points doubles, en d'autres termes un ensemble de points situé dans une région bornée du plan ou de l'espace et susceptible d'être représenté d'une manière bi-univoque et continue sur un segment fermé ou bien sur toute une circonférence de cercle. Dans le premier cas, l'arc aura deux points limite: dans le second, il constituera une courbe fermée. Par point intérieur d'un arc nous entendrons un point de l'arc qui ne coïncide avec aucun des points limite de l'arc.

Considérons maintenant un arc AB et un point intérieur P de cet arc. Mettons que chacun des arcs PA et PB ait en P une tangente déterminée. Désignons par t_1 et par t_2, respectivement, les deux tangentes, qui peuvent différer ou coïncider. Pour une série fondamentale arbitraire P_1 P_2 ... ayant P pour point limite et contenue tout entière dans l'arc PA, il existera alors une position limite déterminée t_1 des droites PP_1, PP_2 ... qui joignent P aux points de la série fondamentale, et cette position limite sera la même pour toutes les séries fondamentales similaires. On pourra donc démontrer que la série de demi-droites issues de P qui contient les points P_1 P_2 ... aura également une position limite bien déterminée, à savoir une demi-droite déterminée de celles qui proviennent du partage de t_1 par P. En effet, si tel n'était pas le cas, on pourrait prendre, dans la série fondamentale, deux séries $Q_1\,Q_2$ ... et $R_1\,R_2$ ... telles que l'une corresponde à des demi-droites PQ_1, PQ_2, ... convergeant vers une demi-droite déterminée, située sur t_1, tandis que l'autre série correspond à des demi-droites PR_1, PR_2 ... convergeant vers la demi-droite opposee sur t_1. L'angle Q_mPR_n

convergerait alors vers 180° si on faisait croître m et n à l'infini. Or les points Q_m et R_n étant situés sur l'arc PA où ils intercepteraient un arc $Q_m R_n$ qui ne contiendrait pas P, toute droite l passant par P et différente de t_1 rencontrerait cet arc en un point au moins quand m et n dépasseraient certaine limite déterminée. D'où il résulterait que l contînt, sur l'arc PA, une série fondamentale ayant P pour point limite, ce qui ne serait pas compatible avec l'hypothèse d'après laquelle il y aurait en P une tangente déterminée. Donc:

Théorème 7. — Étant donné un arc AB ayant, en un point intérieur P, et du côté de P qu'indique le point A, une tangente déterminée, cette tangente contiendra une demi-droite représentant la position limite d'une demi-droite partant de P et contenant un point mobile, de l'arc PA, qui convergera vers P.

Cette demi-droite nous l'appellerons la demi-tangente, en P, de l'arc PA. Et si nous considérons l'autre arc PB, nous sommes amenés à constater pour lui aussi l'existence, en P, d'une demi-tangente déterminée.

Les deux demi-tangentes peuvent faire partie de droites différentes. En ce cas l'arc est dit avoir, en P, un point anguleux. Au cas où les demi-tangentes coïncident, on dit que l'arc a, en P, un point de rebroussement; quand, au contraire, elles sont opposées, le point P est dit un point ordinaire.

Théorème 8. — Dans le cas d'un point ordinaire P, la tangente est position limite d'une droite joignant deux points de l'arc, M et N, situés de côtés opposés de P et convergeant vers P d'une façon arbitraire.

Supposons, en effet, que les demi-droites PM et PN fassent avec leurs positions limite respectives (les deux demi-tangentes opposées en P) les angles infiniment petits ε et η; l'angle M du triangle MPN sera moindre que l'angle adjacent-supplémentaire de P, lequel sera $\leq \varepsilon + \eta$. (Au cas spécial où P,

M, N seraient en ligne droite, on n'obtiendrait pas de triangle, mais alors P finirait par être situé entre M et N quand ε et η dépasseraient certaine limite minimum, de sorte que l'angle PMN serait nul.) Il en résulte que les droites MN et MP convergent vers la même position limite.

Dans le cas d'un point anguleux P d'un arc, une droite joignant deux points de l'arc situés chacun de son côté de P n'aura pas de position limite déterminée si tant est que ces points convergent vers P. Car toute droite l passant par P et située dans l'angle adjacent supplémentaire de celui que forment les deux demi-tangentes est nécessairement position limite d'une série des droites de jonction considérées. La démonstration de cet énoncé est assez facile pour que nous puissions nous dispenser de la donner ici. Dans le cas où P est un point de rebroussement, le raisonnement sera tout à fait analogue.

En attribuant, comme nous allons le faire dans les pages qui suivent, telle ou telle propriété au voisinage d'un point P sur un arc AB, nous entendons dire par là qu'il est possible de choisir, parmi les arcs contenus dans l'arc considéré et qui contiennent P comme point intérieur, un arc tel qu'il jouisse, lui aussi bien que tous les arcs similaires qu'il contient, de la propriété en question.

Nous allons nous occuper exclusivement d'arcs plans, et nous pouvons énoncer premièrement sur le voisinage du point ordinaire que toute droite passant par le point et située dans le plan de la courbe, sans toutefois se confondre avec la tangente, partagera le voisinage du point en deux parties séparées placées chacune de son côté de la droite. Ceci s'ensuit directement de la définition des demi-tangentes. En supposant donc que par un point intérieur ordinaire P, contenu dans un arc plan, passe une droite l ayant le voisinage de P placé tout entier d'un de ses côtés (abstraction faite des points éventuels sur l), cette droite l sera nécessairement tangente à l'arc, en P.

Quant à la position de la tangente par rapport à un point ordinaire P et par rapport au voisinage de ce point, quatre cas différents peuvent se présenter:

1° La tangente n'a que le point P en commun avec le voisinage de P et ce voisinage est d'ailleurs situé tout entier d'un seul côté de la tangente. — Dans ce cas le point P s'appelle un point convexe.

2° La tangente n'a que le point P en commun avec le voisinage de P et partage ce voisinage en deux parties séparées situées chacune de son côté de la tangente. — Le point P est dit alors point d'inflexion.

3° La tangente a une infinité de points en commun avec le voisinage de P et contient par suite une infinité de points situés sur l'arc et ayant P pour point limite; nous faisons toutefois abstraction du cas où le voisinage de P contiendrait un segment. — Le point P s'appelle alors point d'ondulation.

4° Le voisinage du point P contient un segment où P se trouve contenu soit comme point limite soit comme point intérieur. — Soient M et N les points limites du plus grand segment possible qui puisse, tout en étant situé sur l'arc considéré contenir le segment compris dans le voisinage de P; et supposons que la courbe se prolonge au delà de ces points. Alors de deux choses l'une: ou le prolongement de la courbe au delà de M et N se maintiendra dans la première partie de son parcours d'un même côté de la tangente, ou bien il formera un point d'ondulation. Il est aisé de se rendre compte des cas possibles que nous obtenons ainsi.

Un arc, ordinaire en tous ses points (pour qu'il le soit, il faut seulement, d'après la définition, qu'il ait aux points limite une tangente déterminée et aux points intérieurs deux demi-tangentes de sens contraire) est dit un arc *ordinaire*. C'est de ce genre d'arcs que nous allons surtout nous occuper dans ce qui suit, et nos recherches porteront de préférence sur la distribution des divers genres de points: points convexes, points d'inflexion, points d'ondulation, segments. Mais avant d'aborder l'étude du sujet principal il nous faudra formuler encore quelques propositions auxiliaires.

§ 4. Extensions du théorème de la valeur moyenne.

Théorème 9. — Un arc plan AB composé exclusivement de points ordinaires (les seuls points limite A et B, que nous supposons différents, peuvent être exceptés) aura au moins un point intérieur dont la tangente sera parallèle à la droite AB.

Au cas où l'arc coïncide avec le segment AB, la condition se trouve remplie. Dans tous les autres cas, l'ensemble de droites parallèles à AB et contenant chacune au moins un point de l'arc AB, formera un ensemble parfait et d'un seul tenant de droites parallèles et remplira par conséquent une bande du plan comprise entre deux droites limite différentes dont une au moins, l, différera de AB. La droite l aura au moins un point en commun avec l'arc puisqu'elle peut être représentée comme limite d'une série de droites parallèles à AB et contenant chacune au moins un point de l'arc. Or, comme l'arc est situé tout entier d'un côté de l (abstraction faite des points situés sur l), l sera donc tangente à l'arc.

Le théorème 9 comprend, comme cas tout à fait spécial, le théorème sur la valeur moyenne dans le cas de la fonction continue réelle d'une seule variable. Si nous représentons l'arc considéré par les équations $x = \varphi(t)$, $y = \psi(t)$, l'énoncé du théorème 9 revient à dire que l'équation

$$\lim_{k=0} \frac{\varphi(t+k) - \varphi(t)}{\psi(t+k) - \psi(t)} = \frac{\varphi(t_1+h) - \varphi(t_1)}{\psi(t_1+h) - \psi(t_1)}$$

est satisfaite pour une valeur au moins de t comprise entre t_1 et t_1+h.

Du théorème 9 nous arrivons, à l'aide d'une simple transformation projective au théorème suivant:

Théorème 10. — Étant donné un arc plan AB composé uniquement de points ordinaires (les deux points limite que nous supposons différents, peuvent faire exception) et contenu dans un domaine convexe Ω, on pourra mener une tangente à l'arc par tout point P du prolongement de la droite AB au delà de Ω.

De ceci résulte, spécialement, qu'au cas où un arc ordinaire n'aurait que les points A et B en commun avec la droite AB, on pourra mener, par tout point P du prolongement du segment AB, une tangente à l'arc.

Théorème 11. — Étant donné un arc ordinaire plan contenu dans un domaine convexe fini Ω et dont les tangentes coupent toutes un autre domaine convexe Ω' n'ayant pas de point en commun avec Ω, les sécantes de l'arc couperont toutes également Ω'.

Le cas trivial où Ω' forme un demi-plan ne sera pas traité dans ce qui suit.

Au cours de la démonstration du théorème 6 nous avons vu qu'on peut trouver une droite c telle que l'un des demi-plans limités par elle contienne Ω et que l'autre contienne Ω' tandis que c n'ait pas de point en commun avec les deux domaines ni avec leur frontière. Cette droite c va nous être utile ici.

S'il existait une sécante s de l'arc en question telle qu'elle ne coupât pas Ω', s aurait en tout cas deux points en commun avec l'arc; le nombre des points communs pourrait dépasser 2, toutefois il ne saurait être infini, s étant dans cette hypothèse tangente (en chacun des points limite des points communs) et devant par conséquent couper Ω'. En tout cas on pourrait donc prendre sur s, parmi les points qui lui seraient communs avec l'arc, deux, M et N, consécutifs sur l'arc et tels que l'arc MN fût tout entier situé d'un côté de s.

Considérons maintenant la droite c dont il a été question plus haut. Au cas où $s \neq c$ on pourrait mener, en vertu du théorème 9, une tangente à l'arc MN parallèle à c, laquelle ne couperait pas Ω', ce qui serait en contradiction avec notre hypothèse. Pour le cas où s ne serait pas parallèle à c nous distinguerons deux cas:

1° L'arc MN et le domaine Ω' sont situés d'un même côté de s. — Du point d'intersection de s et de c on pourrait alors mener une tangente à l'arc MN (théorème 10), laquelle tangente serait contenue dans les domaines angulaires entre s et c qui ne contiendraient pas Ω', ce qui ne serait pas compatible avec notre hypothèse d'après laquelle toutes les tangentes de l'arc couperaient Ω'.

2° L'arc MN et le domaine Ω' sont situés de côtés opposés de s. — Le domaine Ω étant fini, on pourrait mener une droite c', parallèle à c, de manière que Ω fût situé entre c et c'. Du point d'intersection de c' avec s on pourrait ensuite mener une tangente à l'arc MN et cette tangente ne couperait pas Ω'.

Dans tous les cas, successivement examinés, l'hypothèse d'une sécante ne coupant pas Ω' a donc entraîné celle d'une tangente ne coupant pas, elle non plus, Ω', ce qui serait en contradiction avec notre hypothèse. Le théorème 11 est donc démontré.

Au cas où Ω' serait réduit en un point, le théorème énonce qu'un arc ordinaire plan, dont les tangentes passent toutes par un même point, c'est une droite passant par ce point.

§ 5. Sur l'existence de points convexes et de points d'inflexion.

En entreprenant l'étude plus détaillée de l'arc ordinaire nous commencerons par établir le théorème suivant sur l'existence de points convexes.

Théorème 12. — Tout arc ordinaire plan ne contenant pas de segment de droite, contiendra nécessairement une infinité de points convexes formant un ensemble partout dense sur l'arc.

Nous allons démontrer que tout arc AB contenu dans l'arc donné a, au moins, un point convexe intérieur. A cet effet, nous construisons le domaine convexe Ω de l'arc AB. Dans le cas où la frontière de ce domaine contient une portion, d'un seul tenant, de l'arc AB, cette portion constituera un arc convexe et, partant, tous ses points seront des points convexes. Si, au contraire, la frontière du domaine ne remplit pas cette condition, les points de l'arc AB qui font partie de la frontière formeront un ensemble nulle part dense et il en sera de même du diagramme du domaine. Supposons d'abord que les points A et B ne fassent pas partie de la frontière de Ω. Dans ce cas, ils ne feront pas non plus partie du diagramme. Sur la frontière de Ω, les points du diagramme se trouveront distribués de telle sorte que tout segment joignant deux points consécutifs du diagramme fera partie de la frontière et que la frontière tout entière sera composée de tels segments et des points du diagramme. Aucun point du diagramme ne se trouvera isolé sur la frontière. En effet, posons le cas où un point P du diagramme aurait et un point suivant, R, et un point précédent, Q, du diagramme situés sur la frontière; ces segments PQ et PR feraient donc tous les deux partie de la frontière. Mais alors ces deux segments se trouveraient situés dans le prolongement l'un de l'autre, car si tel n'était pas le cas, toute droite passant par P et comprise dans l'angle adjacent et supplémentaire de l'angle formé par les deux segments, aurait tout le domaine Ω, et, par conséquent, tout l'arc AB, situés d'un même côté, ce qui serait en contradiction avec l'hypothèse qui veut que P soit un point ordinaire sur l'arc AB. D'un autre côté, pour que les segments PQ et PR fussent situés chacun dans le prolongement de l'autre, il devrait y avoir un point de diagramme P situé sur un segment QR joignant deux autres points du diagramme, ce qui seraït contraire à la définition du diagramme. Donc: chacun des points du diagramme doit être un point limite du diagramme. Et comme le diagramme est en outre, en vertu du théorème 3, un ensemble de points fermé, nous avons démontré que le diagramme est un ensemble de points parfait et nulle part dense, situé sur la frontière de Ω. De plus, nous savons, concernant cette frontière, qu'elle a, en chacun de ses points, une tangente déterminée. En effet, au cas où le point est un point de diagramme, la tangente, en ce point, à l'arc AB, sera la seule ligne passant par ce point qui ait l'arc AB et, par suite, le domaine Ω situés tout entiers d'un même côté, et au cas où le point n'est pas un point de diagramme, il se trouvera contenu dans un segment qui fera partie de la frontière et qui sera, par conséquent, la seule tangente en ce point. Les segments qui sont contenus dans la frontière de Ω et qui joignent par conséquent, deux à deux, en ordre de succession, les points du diagramme, constituent un ensemble dénombrable. En effet, la frontière de Ω a une longueur finie déterminée l, par conséquent le nombre des segments y contenus et dont la longueur dépasse certaine valeur arbitraire ε, sera fini. En écartant d'abord les segments dont la longueur dépasse $\frac{l}{4}$, ensuite ceux de plus de $\frac{l}{8}$, $\frac{l}{16}$, etc. on arrive facilement à sérier les segments de manière à ce qu'ils forment un ensemble dénombrable. Les points limite de ces segments formeront donc également un ensemble dénombrable, et le diagramme, qui constitue un ensemble de points parfait sur la frontière de Ω c'est-à-dire un ensemble non dénombrable, doit contenir des points qui ne sont points limite d'aucun des dits segments. Or un tel point de diagramme est nécessairement point convexe sur l'arc AB, car la tangente à ce point n'a pas d'autres points en commun avec Ω ni, par conséquent, avec l'arc.

Nons venons de supposer que A et B ne soient pas situés sur la frontière du domaine Ω. Au cas où ces points ou l'un des deux seulement, ferait partie de la frontière on pourra toujours prendre, sur celle-ci, une portion continue β qui ne contienne ni A ni B et qui ne soit pas constituée par un segment unique. Une telle portion de frontière β formera un arc convexe contenant un ensemble dénombrable de segments et un ensemble parfait et nulle part dense de points de diagramme; c'est parmi ces derniers qu'on trouvera l'un des points cherchés (à l'aide du procédé ci-dessus indiqué).

Dans ce qui précède nous nous sommes fondé sur le fait bien connu qu'un ensemble de points parfait et linéaire n'est pas dénombrable. On pourrait aussi raisonner comme suit: Les segments en question formant un ensemble dénombrable, il sera toujours possible de trouver, pour un arc β faisant partie de la frontière de Ω et ne contenant ni A ni B, une corde qui ne soit parallèle à aucun des segments. Menant ensuite une tangente à β, parallèlement à la corde, le point de contact de cette tangente déterminera l'un des points convexes demandés sur l'arc AB.

Avant de passer au théorème sur l'existence des points d'inflexion il nous faut démontrer le théorème subsidiaire suivant:

Théorème 13. — Étant donné un arc ordinaire AB qui n'a pas de points situés de part et d'autre de la tangente en B, et dont la demi-tangente, b, en B, ne contient pas A, toute demi-droite l issue de B et située dans l'angle convexe compris entre les demi-droites b et BA, aura au moins un point, différent de B, en commun avec l'arc.

De ce fait que l'arc n'a pas ses points situés de part et d'autre de la tangente en B, nous pouvons conclure que tous les points qui sont communs à l'arc et à la droite BA sont contenus dans la demi-droite BA. Touchant ces points, nous savons qu'ils n'ont pas de point limite en B. Il doit donc y en avoir un, C, situé de telle sorte que l'arc BC n'ait aucun point intérieur en commun avec la demi-droite BA. Par conséquent, l'arc BC doit être situé tout entier d'un côté de la droite BA (abstraction faite des points B et C, situés ceux-là sur la droite elle-même). Il se trouvera de celui des côtés de la droite BA qu'indique la demi-droite b, car sur l'arc BC il est possible de choisir un point B_1, voisin de B et situé de manière à ce que la demi-droite BB_1 fasse avec b un angle moindre qu'une valeur déterminée quelconque ε. Prenons ε moindre que l'angle compris entre l et b, de sorte que B_1 se trouve soit à l'intérieur de l'angle formé par l et b, soit sur b; les relations de position indiquées suffirons pour montrer que l'arc B_1C coupe l. En effet, les points limite de l'arc, B_1 et C, sont situés de côtés opposés de l, et les points de l'arc sont à l'intérieur de l'angle convexe compris entre b et la demi-droite BA ou bien sur les demi-droites qui forment les côtés de cet angle (à l'exception du point B).

A présent nous pouvons entreprendre la démonstration du théorème important que voici:

Théorème 14. — Étant donné un arc ordinaire plan AB exempt de segments et n'ayant que les points A et B en commun avec la droite AB (nous supposons A et B différents), et supposé que la demi-tangente en B contienne A, l'arc considéré contiendra au moins un point d'inflexion.

Tous les points de l'arc (abstraction faite de A et de B) sont situés d'un même côté de la droite $AB = l$. Le domaine convexe Ω de l'arc sera donc limité par le segment AB et par un arc convexe β joignant A et B et situé d'ailleurs du même côté que l'arc donné par rapport à l. L'ensemble de points qui est commun à β et à l'arc AB ne saurait avoir de point limite en B; s'il en était ainsi, les deux arcs auraient, en B, une demi-tangente commune, ce qui n'est pas possible vu que la demi-tangente, en B, à l'arc donné, est BA, alors que la demi-tangente, en B, à β est nécessairement différente de BA, l'arc β et le segment BA formant à eux deux la frontière du domaine convexe plan Ω laquelle frontière ne saurait avoir des demi-tangentes coïncidant en B.

En parcourant l'arc β depuis B jusqu'à A, nous rencontrons donc, après B, un point déterminé B_1 qui sera le premier point commun à β et à l'arc donné (et ce point B_1 ne tombera certainement pas en A). Le segment BB_1 fera donc nécessairement partie de la frontière du domaine Ω et ne se confondra pas avec la droite AB. L'arc BB_1 et le segment BB_1 n'auront en commun que leurs points limite B et B_1; ils constitueront une courbe fermée, exempte de points doubles, qui limitera un domaine Ω' situé tout entier d'un même côté de la droite BB_1. La droite AB n'aura que le point B en commun avec la frontière de ce domaine; donc le point A sera à l'extérieur de Ω'. Comme en outre les deux arcs BB_1 et B_1A, provenant du partage de l'arc donné AB par B_1, n'ont que le point B_1 en commun, l'arc B_1A sera nécessairement extérieur au domaine Ω'. A l'aide de ces données nous allons prouver que la demi-tangente, en B_1, à l'arc B_1B est nécessairement la demi-droite B_1B, tandis que la demi-tangente à l'arc B_1A sera opposée à B_1B. Admettons en effet que ce soit l'inverse qui a lieu et envisageons les conséquences qu'entraînerait cette hypothèse.

Si la demi-droite B_1B était demi-tangente à l'arc B_1A, et que la demi-droite opposée fût demi-tangente à l'arc B_1B, une demi-droite arbitraire m, issue de B et située à l'intérieur de l'angle convexe compris entre les deux demi-droites B_1B et B_1A, couperait, en vertu du théorème 13, les deux arcs, l'arc B_1A et l'arc B_1B; elles les couperait peut-être même en plusieurs points, mais ces points ne sauraient en tous cas avoir, en B_1, un point limite, m n'étant pas tangente en B_1. Parmi les points d'intersection de la demi-droite et de l'arc B_1A, nous choisirons P, le point le plus rapproché de B_1; nous choisirons de même, parmi les points où la demi-droite coupe l'autre arc B_1B, le point Q, le plus voisin de B_1. Alors, si nous faisons converger m, toujours situé dans l'angle convexe AB_1B, vers la demi-droite B_1B, P et Q convergeront vers B_1 et B, respectivement. Il serait donc possible de trouver une position de m telle qu'en supposant P et Q placés dans les positions correspondantes, on eût P contenu dans le segment B_1Q en même temps que ce segment fût tout entier contenu dans Ω'. Il en résulterait que P fût situé à l'intérieur de ce domaine, ce qui serait en contradiction avec le résultat ci-dessus obtenu d'après lequel tout point intérieur de l'arc B_1A serait extérieur à Ω'. Nous avons donc démontré que la demi-tangente à l'arc B_1B contient le point B.

Ensuite nous allons démontrer que l'arc BB_1 ne saurait avoir de points situés sur le prolongement du segment BB_1 au delà de B_1. En effet, s'il existait un tel point, C_1, (au cas où il y en aurait plusieurs, nous choisirions celui qu'on rencontre le premier en parcourant l'arc BB_1 à partir de B), l'arc BC et le segment BC limiteraient un domaine Ω'', et on voit par analogie avec ce qui a été exposé ci-dessus, que le point A serait extérieur à ce domaine; par contre il y aurait sur l'arc B_1A, dans le voisinage de B_1, des points intérieurs à Ω'' de sorte que cet arc couperait l'arc BC, ce qui est impossible attendu que l'arc donné n'a pas de points doubles.

Nous voyons donc que l'arc BB_1 remplit des conditions analogues à celles que remplissait l'arc donné, AB,: il est ordinaire, ne contient pas de segment et n'a que les points B et B_1 en commun avec la droite BB_1. En outre nous savons que la demi-tangente en B_1 contient B.

Sur l'arc BB_1 on pourra ensuite, en répétant le procédé ci-dessus indiqué, délimiter un arc B_1B_2 tel qu'il n'ait que les points B_1 et B_2 en commun avec la droite B_1B_2 et que la demi-tangente, en B_2, à l'arc contienne B_1, etc. On pourra former ainsi, par une série déterminée de constructions bien définies, une série de points B, B_1, B_2, B_3 ... différents entre eux et situés sur l'arc donné AB dans un ordre tel que chacun des points (pris dans l'ordre successif de la dite série, à partir de B_2) se trouve placé entre les deux points précédents et de manière à ce que l'arc $B_n B_{n+1}$ soit situé tout entier d'un même côté de la droite $B_n B_{n+1}$ et que sa demi-tangente en B_{n+1} contienne B_n.

Il résulte en outre du raisonnement ci-dessus que l'arc $B_n B_{n+1}$ et, partant, les arcs y contenus $B_{n+1}B_{n+2}$, $B_{n+2}B_{n+3}$, etc. sont situés, par rapport à la droite $B_n B_{n+1}$, du même côté que B_{n+2}, et, par rapport à la droite $B_{n+1}B_{n+2}$, du même côté que B_n.

Sur l'arc BB_1 l'ordre des points indiqués sera le suivant:

$$B B_2 B_4 \ldots\ldots B_5 B_3 B_1.$$

Il y aura donc deux cas possibles:

1° La série de points $B B_2 B_4 \ldots$ aura un point limite U, et la série de points $B_1 B_3 B_5 \ldots$ aura un point limite V, différent de U. Ces points limite se trouveront situés comme il suit par rapport aux autres points de l'arc BB_1:

$$B B_2 B_4 \ldots .\, UV \ldots .\, B_5 B_3 B_1.$$

Or l'arc UV représentera la limite des arcs $B_n B_{n+1}$, $B_{n+1} B_{n+2}$, etc. quand n croît à l'infini: il sera donc situé du même côté que B_{n+2} par rapport à la droite $B_n B_{n+1}$, et du même côté que B_n par rapport à la droite $B_{n+1}B_{n+2}$, et cela sera vrai pour toute valeur de n. L'arc UV se trouvera ainsi toujours compris dans l'angle convexe $B_n B_{n+1}B_{n+2}$; mais en attribuant par exemple à n les valeurs successives des chiffres pairs on aura B_n et B_{n+2} convergeant vers un même point U, tandis que B_{n+1} convergera vers V. L'angle en question convergera donc vers zéro, son sommet convergeant vers V et ses deux côtés vers la demi-droite VU. Il en résulterait que l'arc UV coïncide avec le segment UV, ce qui serait en contradiction avec notre hypothèse d'après laquelle l'arc AB ne contiendrait pas de segment. Reste à examiner l'autre éventualité:

2° Les séries de points $BB_2B_4\ldots$ et $B_1B_3B_5\ldots$ ont un point limite V en commun de sorte que nous aurons les points placés sur l'arc dans l'ordre suivant:

$$BB_2B_4\ldots\ldots V\ldots\ldots B_5B_3B_1.$$

Comme V est point limite de B_n et de B_{n+1}, lorsque n croît à l'infini, et comme d'autre part ces deux points de l'arc sont situés de côtés opposés de V, la droite B_nB_{n+1} convergera, en vertu du théorème 8, vers la tangente v en V. De la situation des points sur l'arc il résulte en outre que les demi-droites B_1B_2, B_3B_4, $B_5B_6\ldots$ convergeront vers la demi-tangente en V dont le sens est indiqué par l'ordre des points $V\ldots B_4$, B_2, B, tandis que les demi-droites B_2B_3, B_4B_5, ... convergeront vers la demi-tangente opposé en V.

D'après le théorème 8, on pourra toujours délimiter autour de V un voisinage MN de l'arc tel que l'angle compris entre deux demi-droites quelconques issues de points situés sur l'arc MV et contenant chacune un point au moins de l'arc NV — qu'un tel angle, disons nous, soit moindre qu'une valeur arbitraire ε. Mettons que cette valeur ait été choisie $< 60°$. Alors l'angle compris entre chacune des demi-droites indiquées et la demi-tangente, en V, à l'arc VN sera également $< 60°$. Prenons l'indice n assez grand pour que B_n et B_{n+1} et, par conséquent, B_{n+2}, B_{n+3}, etc. soient points intérieurs de l'arc MN et examinons la ligne brisée $B_nB_{n+1}B_{n+2}\ldots.$ Nous savons que l'angle $B_nB_{n+1}B_{n+2} < \varepsilon$ et comme B_{n+3} est compris dans cet angle, l'angle $B_{n+2}B_{n+1}B_{n+3}$ sera moindre que l'angle $B_nB_{n+1}B_{n+2}$ et, partant, $< \varepsilon$. Dans le triangle $B_{n+1}B_{n+2}B_{n+3}$ il y aura donc deux angles moindres que ε: ceux qui ont pour sommets B_{n+1} et B_{n+2}. Le troisième angle du triangle, $B_{n+2}B_{n+3}B_{n+1}$, sera donc $> 180° - 2\varepsilon > 60°$. Concernant la situation de B_{n+4} nous savons d'abord que ce point est situé à l'intérieur de l'angle $B_{n+1}B_{n+2}B_{n+3}$, et ensuite, en raison des inégalités ci-dessus signalées, qu'il est également intérieur à l'angle $B_{n+2}B_{n+3}B_{n+1}$. Nous en pouvons conclure que B_{n+4}

est contenu dans le triangle $B_{n+1}B_{n+2}B_{n+3}$, et tel sera le cas pour toute valeur supérieure de n. En désignant, pour simplifier, les points B_n, B_{n+1} ... par les chiffres 0, 1, 2, ... nous aurons donc, sur l'arc donné, une série de points placés dans l'ordre suivant:

$$0,\ 2,\ 4,\ \ldots.\ V\ \ldots.\ 5,\ 3,\ 1.$$

Toutes les demi-droites issues d'un point de rang pair et contenant des points de rang impair formeront deux à deux des angles aigus, moindres que ε et il en sera de même de toutes les demi-droites issues de points de rang impair et contenant des points de rang pair.

La ligne brisée 0 1 2 3 ... est composée de telle sorte que tout triangle ayant pour sommets trois points consécutifs de la série indiquée renferme tous les points suivants; la ligne brisée en question formera par conséquent un polygone spiral ayant en V un point asymptotique.

Le point 4 étant contenu dans le triangle 1 2 3, le prolongement du segment 3 4 au delà de 4 rencontrera 1 2 en un point S. De même le prolongement de 5 6 au delà de 6 rencontrera 3 4 en un point S', mais il rencontrera également le segment 1 2. En effet, les demi-droites partant de 6 et contenant les points 1 et 3, ou bien des points contenus dans le segment 1 3, font avec la demi-droite 6 5 des angles moindres que ε; par suite, aucune de ces demi-droites ne saurait coïncider avec le prolongement du segment 5 6 au delà de 6. Ce prolongement rencontrera le côté $3\,S$ du triangle $1\,S\,3$; il ne rencontrera pas le côté 1 3; il faut donc, 5 et 1 étant situés de côtés opposés de la droite $3\,S$ (puisque 5 est contenu dans $\triangle$ 2 3 4) qu'il rencontre $1\,S$ en un point S_1.

On pourra continuer de même: Le prolongement de 7 8 au delà de 8 rencontrera 5 6 en un point S'' et (voir le raisonnement ci-dessus) il rencontrera 3 4 en un point S_1'. Il rencontrera en outre 1 2, car nous pouvons raisonner comme plus haut: le prolongement de 7 8 au delà de 8 ne saurait rencontrer 13 et comme d'autre part il rencontre $3S$ et que les points 1 et 8 sont situés de côtés opposés de $3S$ il doit rencontrer $1S$ en un point S_2, etc.

Donc: le prolongement de 34 au delà de 4 rencontrera le segment 12 en un point S. Le prolongement de 56 au delà de 6 rencontrera le segment 34 en un point S' et le segment 12 en un point S_1. Le prolongement de 78 au delà de 8 rencontrera le segment 56 en un point S'', le segment 34 en un point S' et le segment 12 en un point S_2, etc. Voilà les propriétés de la ligne brisée 1234.... qui vont nous servir pour en examiner la situation par rapport à l'arc.

L'arc 23 est compris dans l'angle 234 et situé tout entier d'un côté de la droite 12. Il faut donc qu'il soit contenu dans le triangle $23S$, Par suite, le segment $4S$ ne partagera en aucun endroit l'arc 23 en parties séparées; d'un autre côté, ce même segment $4S$ n'a pas de point en commun avec l'arc 13, les demi-droites qui partent de 4 et qui contiennent les points de cet arc faisant toutes, avec le segment 43, des angles moindre que ε et ne pouvant, par conséquent, avoir aucun point en commun avec le segment $4S$ qui est opposé à 43. Le segment $4S$ sera donc situé dans le domaine limité par le segment 12 et par l'arc 12, et l'arc 20 qui n'a pas de point en commun avec ce domaine (excepté le point 2 situé sur la frontière du domaine) n'aura pas non plus de point en commun avec le segment $4S$ contenu dans le domaine. Le prolongement de $4S$ au delà de S n'aura pas lui non plus de point en commun avec l'arc 20 puisqu'il en est séparé par la droite 12, Donc: la demi-droite formée par le prolongement du segment 34 au delà de 4, ne partagera pas l'arc 42 et n'aura pas de point en commun avec l'arc 20. En appliquant ce résultat aux indices immédiatement supérieurs on a: La demi-droite formée par le prolongement du segment 56 au delà de 6 ne partagera pas l'arc 64 et n'aura pas de point en commun avec l'arc 42. Elle ne partagera donc pas l'arc 6 4 2. Or cette demi-droite contient le segment $6S_1$ qui, par suite, ne partagera pas l'arc 5 6 4 2. On voit en outre que ce segment n'aura pas de point en commun avec l'arc 1 3 5, car toutes les demi-droites qui partent de 6 et qui contiennent des points contenus dans ce dernier arc feront avec le segment 6 5 des angles moindres que ε et, par conséquent, aucune de ces demi-droites ne saurait avoir de point en commun avec le segment $6S_1$. Donc: Le segment $6S_1$ ne partagera pas l'arc 5 6 4 2 et n'aura pas de point en commun avec l'arc 1 3 5. Il sera donc situé dans le domaine limité par le segment 1 2 et par l'arc 1 2 et il n'aura pas de point en commun avec l'arc 2 0 qui n'est pas contenu dans ce domaine. Il résulte donc de notre raisonnement que la demi-droite formée par le prolongement du segment 5 6 au delà de 6 ne partagera pas l'arc 6 4 et n'aura pas de point en commun avec l'arc 4 2 0. On pourra poursuivre le raisonnement par voie d'analogie: la droite formée par le prolongement de 7 8 au delà de 8 ne partagera pas l'arc 8 6 et n'aura pas de point en commun avec l'arc 6 4 2 0. Après induction complète on verra que la demi-droite formée par le prolongement du segment $2n-1$, $2n$ au delà de $2n$ ne partagera pas l'arc $2n$, $2n-2$ et qu'elle n'aura pas de point en commun avec l'arc $2n-2$, $2n-4$, ... 2, 0. Quand n croît à l'infini, la demi-droite considérée convergera vers la demi-tangente en V du côté qui correspond à l'arc V ... 4 2 0. Au sujet de cette demi-tangente on peut donc conclure qu'elle n'aura pas de point en commun avec son arc et aussi que la demi-tangente opposée n'aura pas non plus de point en commun avec son arc.

Comme nous avons vu en outre que toutes les demi-droites formées par le prolongement de 3 4 au delà de 4; de 5 6 au delà de 6; etc., rencontrent le segment 1 2 (aux points $SS_1S_2 \ldots$) il en suit que la demi-tangente en V de l'arc V .... 4 2 0 rencontrera également ce segment (il est vrai qu'elle ne peut pas passer par l'un des points limite du segment). La tangente en V n'aura donc que le point V en commun avec l'arc $1\,3\,5 \ldots V \ldots 4\,2\,0$ et elle aura les points 1 et 2 situés de côtés opposés. Il faut alors qu'en V elle partage l'arc en deux parties séparées situées de part et d'autre de la tangente; autrement dit: le point V est un point d'inflexion. Et notre démonstration du théorème 14 est faite.

Théorème 15. — Étant donné un arc ordinaire plan ne contenant pas de segment et ayant trois, et rien que trois points: A, B, C en commun avec une droite déterminée l, et posé le cas que ces points se suivent sur l'arc aussi bien que sur la droite dans l'ordre indiqué; l'arc contiendra au moins un point d'inflexion.

Ce théorème se laisse ramener au théorème précédent par la considération suivante: L'arc BC a ses points limite B et C situés sur l; à cela près il est tout entier situé d'un côté de l. Toutes les demi-droites partant de A et contenant chacune un point au moins de l'arc BC, remplissent un angle convexe dont l'une des droites limite contient B et C tandis que l'autre, qui ne peut pas tomber sur l, l'arc BC n'ayant que les points B et C en commun avec l, doit être tangente en un point intérieur D de l'arc BC. Il peut y avoir plusieurs (peut-être même une infinité) de points de contact, et ces points de contact ne pouvant en tout cas pas former un ensemble de points au point limite A, il faut qu'un seul soit plus voisin de A que les autres, et ce point nous le désignerons par D.

Il se peut que l'arc ABD ait des points autres que A et D en commun avec le segment AD, mais en tout cas ces autres points ne sauraient avoir un point limite en D, aucun d'eux n'étant situé sur l'arc BD. Parmi les points de rencontre du segment AD avec l'arc AD nous prenons le plus voisin de D, sur l'arc, et nous le désignons par A_1. L'arc

A_1BD et le segment A_1D constituent la frontière complète d'un domaine déterminé Ω. Le point C n'est pas situé sur la frontière de ce domaine; il n'est pas non plus situé à l'intérieur du domaine, car le prolongement du segment BC au delà de C n'a aucun point en commun avec la frontière du domaine. Il faut donc que C soit extérieur au domaine, et l'arc DC, issu d'un point D sur la frontière du domaine et n'ayant que ce point en commun avec la frontière, est nécessairement extérieur à Ω.

Il s'ensuit de là que la demi-tangente en D à l'arc A_1D contient A_1 et, d'après le théorème 14, l'arc contiendra donc au moins un point d'inflexion. *C. Q. F. D.*

Théorème 16. — Une courbe plane fermée (dépourvue de points doubles), qui se compose exclusivement de points ordinaires et qui ne contient pas de segment, sera ou convexe ou bien elle contiendra au moins deux points d'inflexion.

En effet, dans le cas où la courbe n'est pas convexe, la frontière de son domaine convexe contiendra au moins un segment AB joignant deux points de la courbe; la courbe sera située tout entière d'un côté de AB, abstraction faite des points situés sur la droite. Et il se pourrait qu'en dehors de A et de B la courbe eût d'autres points en commun avec la droite, mais ces points ne formeraient nulle part un ensemble dense et on pourra donc toujours trouver sur la droite deux points de la courbe, M et N, tels que le segment MN ne contienne pas de points de courbe. Les points M et N limitent sur la courbe deux arcs β_1 et β_2. La droite MN est tangente en M et en N à tous les deux arcs. Les demi-tangentes en M et en N à l'arc β_1 ne sauraient être du même sens r_1, car, s'il en était ainsi, les demi-tangentes en M et en N à l'arc β_2 seraient du sens r_2, opposé à r_1, ce qui entraînerait l'existence sur l'arc β_2 d'un petit arc MM_1 et d'un autre petit arc NN_1 situés l'un au dedans l'autre au dehors du domaine limité par l'arc β_1 et par le segment MN.

Dans cette hypothèse, l'arc M_1N_1 rencontrerait soit β_1 soit le segment MN, ce qui n'est pas possible. Les demi-tangentes, en M et en N, à β_1, sont donc nécessairement de sens contraires, et la même chose est vraie pour β_2. Il faut donc que dans l'un des deux arcs, dans β_1 ou dans β_2, les demi-tangentes en M et en N contiennent respectivement N et M. Soit β_1 l'arc en question. Alors β_1 ne saurait avoir d'autres points que M et N en commun avec la droite MN. En effet, les autres points communs, s'il y en avait, devraient être sur le prolongement du segment MN et, par suite, les arcs β_1 et β_2 devraient se rencontrer. (Voir à la page 458 un raisonnement tout à fait analogue.) Appliquons maintenant le théorème 14, et la construction y impliquée, à l'arc β_1, et cela de deux manières, en nous basant d'abord sur la circonstance que la demi-tangente en M passe par N, pour trouver un premier point d'inflexion, ensuite nous en trouverons un autre en faisant valoir réciproquement le fait que la demi-tangente en N passe par M. Pour comprendre qu'en appliquant la construction employée au cours de la démonstration du théorème 14 on doive arriver à deux points d'inflexion différents sur β_1 il faut considérer que l'un de ces points d'inflexion est situé sur un arc MM' tel que β_1 se trouvera tout entier d'un côté de la droite MM', et que l'autre point d'inflexion est situé sur un arc NN' qui remplit une condition analogue. Les deux segments MM' et NN' font partie de la frontière du domaine convexe de l'arc β_1, et, par conséquent, les arcs correspondants ne sauraient avoir des points communs. Les deux points d'inflexion sont donc nécessairement différents, et nous avons démontré que la courbe donnée, à moins d'être convexe, doit contenir au moins deux points d'inflexion.

Pour ce qui est des arcs non fermés nous allons démontrer le théorème suivant:

Théorème 17. — Un arc ordinaire AB ne contenant pas de segment et n'ayant que les points A et B en commun avec *la droite AB, doit être convexe ou bien il doit contenir au moins un point d'inflexion.*

En effet, la frontière du domaine convexe de l'arc contient nécessairement le segment AB, et au cas où la frontière ne contient pas d'autre segment que celui-ci, l'arc sera convexe. Il s'agit maintenant de démontrer que dans le cas où la frontière contient un segment en dehors de celui qui joint A à B, l'arc aura au moins un point d'inflexion.

Il faut envisager deux cas: celui où le nouveau segment a des points limite différents de A et de B et celui où le dit segment part d'un de ces deux points.

1° Le nouveau segment MN a des points limite M et N différents de A et de B. — Admettons que M et N soient les seuls points que le segment ait en commun avec l'arc. Les points M et N limiteront sur la courbe fermée constituée par l'arc AB et le segment AB deux arcs β_1 et β_2 dont l'un contiendra le segment AB. A l'aide du raisonnement déjà employé dans la démonstration du théorème précédent, nous voyons que l'un des deux arcs, mettons que ce soit β_1, a, en M et en N, des démi-tangentes passant par N et par M, respectivement. Il s'ensuit que β_2 sera extérieur au domaine limité par β_1 et par le segment MN. Par conséquent, le domaine convexe de β_2 coïncidera avec le domaine convexe de l'arc donné tout entier; donc, β_2 contiendra le segment AB. Et β_1, qui, lui, ne contiendra pas de segment, aura, par suite de la situation des demi-tangentes ci-dessus indiquée, au moins deux points d'inflexion.

2° Soit AC le nouveau segment, — et supposons qu'il n'ait que les points A et C en commun avec l'arc, sans quoi le cas se laisserait aussitôt ramener à celui que nous venons de considérer. Le segment AC et l'arc AC limiteront alors un domaine qui ne contiendra aucun point de l'arc BC (abstraction faite de C) et on voit, à l'aide du théorème 14, que l'arc AC doit contenir au moins un point d'inflexion.

Le théorème 17 est susceptible d'une extension, car nous pouvons démontrer le théorème suivant:

Théeorème 18. — Un arc ordinaire AB ne contenant pas de segment et non partagé par la droite AB (étant, par conséquent, situé tout entier d'un côté de cette droite, abstraction faite des points placés sur elle) sera convexe ou bien il contiendra au moins un point d'inflexion.

En effet, les points qui sont communs à l'arc et à la droite AB ne forment nulle part un ensemble dense. On pourra donc toujours trouver un arc MN tel qu'il soit contenu dans l'arc donné et qu'il ait ses points limite situés sur la droite AB sans avoir d'autres points en commun avec cette droite. Dans le cas où l'arc MN ne contient pas de point d'inflexion il faut, d'après le théorème 17, qu'il soit convexe. Suivant la situation de M et de N par rapport à A et à B la démonstration envisagera trois cas différents.

1° M et N sont des points intérieurs de l'arc AB tels que cet arc se compose des trois arcs: AM, MN, NB. — La droite MN sera alors tangente, en M et en N, à l'arc convexe MN. Les demi-tangentes, en M et en N, à l'arc MN viendront sur le prolongement du segment MN. Le domaine limité par l'arc MN et le segment MN comprendra donc les arcs AM et NB. Au cas où l'arc AM n'a que les points A et M en commun avec la droite AB, il faut, d'après le théorème 14, que cet arc contienne au moins un point d'inflexion. Si, au contraire, il y a plusieurs points communs, on pourra en tous cas en prendre deux, consécutifs, P et Q, tels que l'arc PQ n'ait que ces deux points en commun avec la droite AB. D'après le théorème 17 cet arc contiendra au moins un point d'inflexion ou bien il sera convexe. Or cette dernière hypothèse impliquerait contradiction. En effet, l'un des points P, Q est nécessairement point intérieur de l'arc AB; supposons que ce point soit P; la demi-tangente en ce point tomberait donc sur le prolongement du segment QP ce qui entraînerait que le prolongement de l'arc QP au delà de P fût compris dans le domaine limité par l'arc QP et le segment QP; mais cela est incompatible avec notre hypothèse d'après laquelle l'arc QP avec tout son domaine serait compris dans le domaine limité par l'arc MN et le segment MN. Donc: Dans le cas où M et N sont points intérieurs de l'arc AB, cet arc doit avoir au moins deux points d'inflexion (les arcs AM et BN contenant chacun un point d'inflexion au moins).

2° M tombe en A, tandis que N est point intérieur de l'arc AB. — En appliquant à l'arc BN le raisonnement ci-dessus exposé, on verra que ce dernier arc doit avoir au moins un point d'inflexion.

3° M tombe en A, et N vient en B. — Dans ce cas le théorème 18 se réduit au théorème 17; et la démonstration est faite.

Remarque. — Les théorèmes précédents ont tous été énoncés sous la réserve expresse que les arcs considérés ne continssent pas de segment. Or, comme il résulte d'ailleurs déjà des raisonnements détaillés dont nous nous sommes servis pour démontrer les théorèmes fondamentaux 12 et 14, cette réserve est susceptible d'une atténuation assez considérable qu'on pourrait exprimer en caractérisant comme suit les diverses situations des segments éventuels par rapport à l'arc: Un segment MN, contenu dans un arc ordinaire donné mais ne faisant partie d'aucun autre segment contenu dans l'arc, est dit p o i n t c o n v e x e p r o l o n g é quand l'arc donné contient un arc M_1N_1 tel qu'il comprenne M et N comme points intérieurs et qu'il soit situé tout entier d'un côté de la droite MN (abstraction faite du segment MN); il est dit p o i n t d'i n f l e x i o n p r o l o n g é quand l'arc donné contient un arc M_1N_1 tel que M et N en soient points intérieurs et que cet arc M_1N_1 lui-même soit situé, par rapport à la droite MN, de manière à ce que l'arc MM_1 (abstraction faite de M) se trouve tout entier d'un côté de la droite tandis que l'arc

NN_1 (abstraction faite de N) est situé tout entier de l'autre côté de la droite; enfin le segment MN est dit point d'ondulation prolongé lorsque la droite MN a, en commun avec l'arc donné, une infinité de points qui, sans être situés sur le segment MN, ont M et N, ou en tout cas l'un de ces points, pour point limite. En introduisant ces dénominations on pourra omettre les réserves faites au sujet des théorèmes fondamentaux 12 et 14 (et des théorèmes qui en dérivent); on prendra les énoncés qu'ils contiennent, sur l'existence de points convexes ou de points d'inflexion, au sens large, c'est-à-dire: on admettra la possibilité que ces points convexes ou points d'inflexion soient prolongés. Cependant, cette généralisation des théorèmes doit être faite sous la réserve que l'arc considéré ne soit pas un simple segment.

Cette remarque s'applique également aux théorèmes qui suivent.

§ 6. Sur les courbes ayant un nombre fini de singularités.

Du théorème 16 se déduit immédiatement le théorème que voici:

Théorème 19. Une courbe de Jordan fermée, qui se compose exclusivement de points ordinaires; qui ne contient pas de segment; et qui n'a pas de points d'inflexion, est nécessairement convexe.

A l'aide du théorème 18 nous pouvons nous rendre compte des formes sous lesquelles peut se présenter un arc ordinaire AB n'ayant pas de points d'inflexion.

Au cas où le domaine convexe de l'arc n'a pas de segment contenu dans sa frontière, l'arc lui-même doit former une courbe convexe fermée. Si, au contraire, la dite frontière contient un segment MN, nous pouvons supposer que ce segment n'a que les points M et N en commun avec l'arc. Alors trois cas différents peuvent se présenter:

1° M et N coïncident avec A et B. — Dans ce cas, l'arc AB sera convexe (Théorème 18).

2° L'un des deux points, M, coïncide avec A tandis que N ne coïncide pas avec B. — L'arc donné se composera alors, d'après le théorème 18, d'un arc convexe AN et du restant de l'arc donné, NB. La droite AN sera tangente, en N, à ces deux arcs, et la demi-tangente, en N, à l'arc AN ne contiendra pas A tandis qu'au contraire la demi-tangente, en N, à l'arc NB, contiendra ce point. L'arc NB sera donc situé dans le domaine Ω que limitent l'arc AN et le segment AN, et on peut démontrer qu'il n'a que le seul point N en commun avec ce segment. D'abord il est clair que s'il existait un ensemble de tels points communs n'ayant pas de point limite en N, on serait à même de trouver, parmi eux, un point déterminé, N_1, plus voisin de N, sur l'arc, que les autres et alors l'arc NN_1 contiendrait, d'après le théorème 14, un point d'inflexion. En second lieu, s'il existait un ensemble de points communs ayant un point de condensation en N, on pourrait trouver, dans cet ensemble, deux points N_1 et N_2 tels que l'arc N_1N_2 n'eût que les points N_1 et N_2 en commun avec la droite AN. Il s'ensuivrait que l'arc N_1N_2 serait convexe et que conjointement avec le segment N_1N_2 il limiterait un domaine contenant l'arc qui reste quand de l'arc donné on retranche l'arc N_1N_2; mais cela serait en contradiction avec le résultat déjà obtenu d'après lequel l'arc BN et, par suite, l'arc N_1N seraient contenus dans le domaine Ω. Nous avons donc démontré que l'arc NB n'a que le point N en commun avec le segment AN.

Construisons maintenant le domaine convexe Ω_1 de l'arc NB. Ω_1 sera contenu dans Ω et n'aura que le point N en commun avec Ω. La frontière de Ω_1 ne saurait contenir un segment joignant deux points de l'arc NB: P et Q, tous les deux différents de N. Supposons en effet qu'il en fût ainsi.

Alors l'arc PQ serait convexe, d'après le théorème 18, et toute la portion de l'arc donné qui reste quand on retranche l'arc PQ, devrait être contenue dans le domaine convexe limité par l'arc PQ et par le segment PQ; ce qui est impossible, le dit domaine étant intérieur à Ω. Or, comme d'un côté la frontière de Ω_1 contient nécessairement un segment au moins, l'arc NB n'étant pas fermé, et comme d'autre part elle ne peut contenir que des segments partant de N, nous en pouvons conclure que Ω_1 ne saurait contenir sur sa frontière qu'un seul segment, lequel segment devra avoir en N un de ses points limite. Soit NN' ce segment, ayant N' situé sur l'arc NB. L'arc NN' sera alors convexe (toujours d'après le théorème 18) et le restant de l'arc, $N'B$, sera contenu dans Ω_1 et n'aura que le point N' en commun avec le segment NN'. Ensuite nous construirons le domaine convexe Ω_2 de l'arc $N'B$. Ce domaine sera limité par un arc convexe $N'N''$ et par un segment $N'N''$; il sera contenu dans Ω_1. On continuera de la sorte obtenant ainsi une série de domaines convexes $\Omega, \Omega_1, \Omega_2, \ldots$ situés chacun dans le domaine précédent; et une série d'arcs AN, NN', $N'N''$ ... limitant, conjointement avec les cordes correspondantes, les domaines indiqués. Au cas où la série des domaines est finie, l'arc considéré sera donc composé d'un nombre fini d'arcs convexes, et nous allons démontrer qu'il en sera toujours ainsi. Supposons en effet infinie la série des domaines $\Omega \Omega_1 \Omega_2 \ldots$ La série de points $A\,N\,N'N''$ sur l'arc donné aurait alors un point limite déterminé $N^{(\omega)}$. Ce point limite serait point intérieur de tous les domaines Ω_r et, par suite, toutes les demi-droites qui partent de $N^{(\omega)}$ et qui contiennent chacune un point de l'arc $N^{(r-1)}N^{(r)}$ rempliraient un angle $> 180°$. Or, si on faisait croître r à l'infini, ces demi-droites convergeraient vers une position limite déterminée qui serait la demi-tangente, en $N^{(\omega)}$, à l'arc $AN^{(\omega)}$. Donc notre hypothèse d'une série infinie de domaines n'est pas admissible.

3° Les points M et N sont différents de A et de B. — Supposons que M et N soient situés sur l'arc de manière à ce que $AMNB$ soient des points consécutifs. Pour le cas qui nous occupe, il nous suffit d'ailleurs de savoir que les arcs MNB et NMA sont du même genre que ceux dont il s'agissait dans le cas précédent. Ici encore l'arc AB se compose d'un nombre fini d'arcs convexes. La forme de l'arc nous est connue grâce aux domaines $\Omega\Omega_1$ . . . dont il a été question plus haut. En parcourant dans un sens déterminé un arc ordinaire dépourvu de points d'inflexion on obtient une courbe spirale. Le mouvement en sens inverse peut donner une spirale similaire. Les tours des spirales sont composés d'un nombre fini d'arcs convexes. Donc:

Théorème 20. Tout arc ordinaire plan, exempt de points d'inflexion et de segments, se compose d'un nombre fini d'arcs convexes rangés en spirale simple ou double.

En d'autres termes: nous avons constaté que l'arc ordinaire plan le plus général, qui n'a pas de points d'inflexion, ne saurait avoir d'autres formes que celles indiquées déjà par Mœbius [1] pour un concept de courbe plus spécial mais dont, à vrai dire, il ne donnait pas de définition précise. Dans la suite, un développement plus précis des idées mœbiennes a été donné par Kneser [2] et, dernièrement, par l'auteur du présent mémoire [3], qui les a étudiées à un point de vue plus large.

Du théorème 20 il s'ensuit immédiatement que tout arc ordinaire plan n'ayant pas de points d'inflexion, ni de segments, est coupé par toute ligne droite en un nombre fini de points. De là on déduit immédiatement que tout arc ordinaire plan exempt de segments et pourvu d'un nombre fini

[1] Mœbius, Über die Gestalt spärischer Curven, Leipz. Ber. 1848.

[2] Kneser, Gestalten ebener Kurven, Math. Ann. t. XXXXI, p, 358—59.

[3] Om Grundlaget for Læren om simple Kurver, Nyt Tidsskr. f. Mat. 1907, p. 16.

de points d'inflexion est coupé par toute ligne droite en un nombre fini de points. Donc, étant donné un arc ordinaire sans segments et ayant une infinité de points en commun avec une droite l, cet arc contiendra nécessairement une infinité de points d'inflexion. D'où nous pouvons déduire le théorème fondamental que voici:

Théorème 21. — Tout point d'ondulation d'un arc ordinaire dépourvu de segments est nécessairement point limite d'un ensemble de points d'inflexion.

En effet, tout voisinage du point d'ondulation contiendra une infinité de points d'inflexion.

Etant donnée une courbe plane (fermée ou non fermée) dépourvue de points doubles, supposons qu'en chacun de ses points se trouve, de part et d'autre du point, une tangente déterminée; supposons en outre que la courbe contienne un nombre fini de singularités simples (points de rebroussement, points anguleux, points d'inflexion) et qu'elle soit exempte de segments; alors la courbe se trouvera partagée par les points singuliers en un nombre fini d'arcs composés chacun d'un nombre fini d'arcs convexes. La courbe tout entière sera donc composée d'un nombre fini d'arcs convexes. Le même énoncé sera vrai encore si la courbe contient en outre un nombre fini de points doubles, en supposant la courbe construite par la représentation univoque et continue (mais non pas bi-univoque) d'un segment ou d'une circonférence, et par leurs voisinages respectifs.

Nous pouvons donc énoncer finalement le théorème fondamental suivant:

Théorème 22. — Toute courbe plane qui a, en chacun de ses points, une tangente de part et d'autre[1]*; qui ne contient qu'un nombre fini de singularités simples (points doubles, points de rebroussement, points anguleux, points d'inflexion); et qui*

[1] Aux points limite il n'y aura qu'une seule tangente.

ne contient pas de segment, est nécessairement composé d'un nombre fini d'arcs convexes.

D'où nous pouvons conclure ultérieurement que la tangente de chaque point varie généralement d'une façon continue et qu'en général chaque point a un cercle osculateur déterminé.

La classe de courbes que nous venons d'étudier, couvre le concept de courbe que supposent, plus ou moins implicitement, les recherches géométriques plus anciennes, celles de Mœbius par exemple ou celles de v. Staudt. Dans cette catégorie de courbes rentrent les courbes réelles algébriques et, plus généralement, les courbes réelles analytiques régulières (cela ressort immédiatement du théorème 22). Mais aussitôt qu'on quitte le domaine des courbes analytiques, le concept ci-dessus indiqué ne tardera pas à se montrer trop étroit.

Parmi les études spéciales consacrées aux courbes composées d'un nombre fini d'arcs convexes, nous mentionnerons ici, en dehors de l'ouvrage ci-dessus cité de Kneser, les recherches intéressantes de C. Juel sur les formes que peuvent présenter les courbes fermées de la classe indiquée (situées dans le plan projectif), dans les cas où le nombre de leurs points de rencontre avec une droite arbitraire ne dépasse pas 4[1]. Il est vrai que ces recherches sont d'ordre plutôt topologico-projectif qu'infinitésimal, les problèmes y discutés étant essentiellement ceux qui se posent déjà au sujet des polygones d'un nombre fini de côtés. En passant à des recherches géométriques nécessitant des transformations non collinéaires (ou qui du moins ne le sont que par domaines) on ne pourra plus en rester à cette classe spéciale de courbes.

[1] C. Juel, Indledning i Læren om grafiske Kurver, Mém. de l'Acad. de Copenhague 1899, p. 1—90.

[2] — Om ikke-analytiske Kurver, Mém. de l'Acad. de Copenhague 1906, p. 297—355.

En effet, deux courbes quelconques composées d'un nombre fini d'arcs convexes peuvent avoir une infinité de points communs, et supposé qu'on fasse subir à deux courbes remplissant cette condition une transformation bi-univoque continue dans le plan et qu'on obtienne ainsi, pour l'une des courbes, une droite, l'autre se transformera en une courbe qui ne pourra pas être classée dans la catégorie considérée. Donc: même les transformations non collinéaires les plus simples (telles que l'inversion) nous font sortir de cette classe de courbes.

§ 7. Sur les arcs nulle part convexes.

Nous allons nous occuper des arcs qui se composent uniquement de points ordinaires et qui contiennent un ensemble, partout dense sur l'arc, de points d'inflexion. Cette propriété peut s'exprimer en disant qu'aucune partie de l'arc n'est convexe. Admettons au préalable que l'arc soit une courbe de Jordan, $\varkappa$, c'est-à-dire une courbe fermée exempte de points doubles. Construisons le domaine convexe Ω de l'arc et considérons le diagramme de ce domaine. Au sujet de ce diagramme nous avons déjà eu l'occasion de montrer, au cours d'un raisonnement précédent [1], qu'il forme sur la courbe $\varkappa$ un ensemble de points parfait et nulle part dense. La frontière β de Ω est constituée par des segments, joignant deux à deux les points consécutifs du diagramme, et par les points du diagramme; β aura une seule tangente déterminée en chacun de ses points et cette tangente variera d'une façon continue.

Parmi ces tangentes il y en aura qui contiendront deux points de diagramme. On les appelle les tangentes doubles du diagramme. Concernant ces tangentes doubles, nous pouvons montrer qu'elles constituent un ensemble de points partout dense dans la portion du plan qui est extérieure à Ω, en

[1] Voir à la p. 454.

d'autres termes: il y aura des tangentes doubles coupant chaque petite aire ω extérieure à Ω. En effet on peut mener d'un point quelconque, P, dans ω deux tangentes à la frontière β de Ω; de ces deux tangentes nous allons considérer une tangente déterminée. En faisant parcourir à P un segment situé dans ω mais non contenu dans la tangente en question on pourra mener successivement, de P à β, des tangentes telles qu'elles constituent un ensemble continu. Parmi ces tangentes se trouveront nécessairement des tangentes doubles du diagramme; autrement les points de contact rempliraient un arc convexe, ce qui n'est pas admissible. Donc:

Théorème 23. — Une courbe de Jordan ordinaire et nulle part convexe, qui ne contient pas de segment, aura un diagramme formant un ensemble de points parfait et nulle part dense, et les tangentes doubles du diagramme formeront un ensemble de points partout dense dans la portion du plan qui est extérieure au domaine convexe de la courbe.

Considérons maintenant deux points consécutifs, A et B, du diagramme. Le segment AB est contenu dans la frontière de Ω; il peut avoir d'autres points que A et B en commun avec $\varkappa$; le nombre des points communs peut même être infini. Mais ces points formant un ensemble nulle part dense, il doit y avoir sur AB un ensemble dénombrable de segments ayant leurs points limite situés sur la courbe tandis qu'aucun de leurs points intérieurs ne saurait y être contenu. Soit MN un de ces segments. Nous savons alors, en vertu de raisonnements précédents, que M et N délimitent sur $\varkappa$ un arc dont les demi-tangentes passent par N et par M, respectivement, et qui n'a que les points M et N en commun avec la droite MN. En construisant ensuite le domaine convexe Ω' de l'arc nous verrons tout d'abord que ce domaine est limité par le segment MN et par deux tangentes, MM' et NN', à l'arc MN de sorte que les segments MM' et NN' n'ont pas de point intérieur sur l'arc. M' et N' ne sauraient coïncider, les tangentes MM' et NN' étant différentes entre elles. Le restant de la frontière de Ω' se composera de segments joignant, chacun, deux points de l'arc $M'N'$. Le diagramme de Ω' sera donc constitué par les deux points M et N et par un ensemble de points, parfait et nulle part dense, sur l'arc $M'N'$. Les segments qui forment la frontière de Ω' constitueront un ensemble dénombrable. Les tangentes doubles du diagramme de l'arc $M'N'$ coupent chacune des petites aires qui sont à la fois extérieures à Ω' et au domaine limité par les prolongements des segments $M'M$ et $N'N$ au delà de M et de N, et par le segment MN. Cela se démontre exactement de la même manière que dans le raisonnement ci-dessus concernant la courbe fermée. En faisant ensuite pour l'arc $M'N'$ un raisonnement analogue à celui qu'on a fait relativement à l'arc MN, et ainsi de suite, on obtiendrait à l'aide d'un ensemble dénombrable de constructions de diagrammes une idée de la structure de la courbe.

Ce raisonnement nous servira pour montrer, d'abord, que la courbe contient nécessairement au moins un point d'ondulation et, ensuite, qu'elle contient un ensemble partout dense de points d'ondulation.

Prenons sur l'arc $M'N'$ deux points M_1, N_1 tels que le segment M_1N_1 fasse partie de la frontière de Ω' et que, d'autre part, il ne contienne de l'arc M_1N_1 que les points M_1 et N_1. Alors l'arc MN sera situé tout entier d'un même côté de la droite M_1N_1 (abstraction faite des points contenus dans cette droite) et la même chose aura lieu pour l'arc considéré par rapport à la droite MN. Les segments MN et M_1N_1 seront donc côtés opposés d'un quadrilatère convexe; nous supposons les notations choisies de manière à ce que les points soient situés sur l'arc MN dans l'ordre que voici: MM_1N_1N.

Le point d'intersection S des droites MN et M_1N_1 peut être supposé situé à une distance finie de l'arc MN (au cas où elle ne le serait pas, on pourrait faire subir à la figure une simple transformation projective, ou bien on pourrait modifier légèrement la démonstration qui suit). S sera extérieur au domaine Ω' qui appartient à l'arc MN et, en même temps, extérieur au domaine limité par les prolongements des segments $M'M$ et $N'N$ au delà de M et de N, et par le segment MN. En plaçant autour de S une petite aire convexe, ω, n'ayant pas de point en commun avex Ω' on est sûr de pouvoir trouver des tangentes doubles au diagramme appartenant à l'arc M_1N_1 et dont les points de rencontre avec les droites MN et M_1N_1 soient intérieurs à cette aire ω. Soit M_2N_2 une telle tangente double où M_2 et N_2 sont des points contenus dans l'arc M_1N_1, choisis de façon à ce que le segment M_2N_2 n'ait pas de point en commun avec l'arc M_2N_2. On aura alors, en distribuant les notations de telle sorte que M_1, M_2, N_2, N_1 se suivent sur l'arc dans l'ordre où nous les avons énumérés, les segments M_1N_1 et M_2N_2 comme côtés opposés d'un nouveau quadrilatère convexe; l'arc M_1N_1 se trouvera tout entier d'un même côté de la droite M_1N_1 (côté indiqué par M_2 et N_2) et aussi tout entier d'un même côté de la droite M_2N_2 (du côté où sont M_1 et N_1), en faisant abstraction des points situés sur les droites en question. Les points M_2 et N_2 seront compris dans l'angle convexe en S dont les côtés contiennent respectivement les segments MN et M_1N_1; il est clair que leur droite de jonction M_2N_2 rencontrant les droites MN et M_1N_1 à l'intérieur de l'aire ω, rencontre nécessairement les segments MM_1 et NN_1. Continuons de même: choisissons sur l'arc M_2N_2 deux points M_3, N_3 tels que la droite M_3N_3 soit tangente double au diagramme de l'arc M_2N_2 et coupe les droites M_1N_1 et M_2N_2 à l'intérieur de l'aire ω. En appliquant les notations de manière à ce que les points $M_2M_3N_3N_2$ se trouvent situés sur l'arc dans l'ordre où nous les avons énumérés, on aura un quadrilatère convexe $M_2M_3N_3N_2$, et la droite M_3N_3 rencontrera les segments $M_1 M_2$ et $N_1 N_2$. Elle rencontrera en outre les segments MM_1 et NN_1 ; nous allons le démontrer. La droite $M_2 N_2$ rencontre, en P et en Q, les segments MM_1 et NN_1. M_3 et N_3 sont situés de telle sorte que leur droite de jonction rencontre le segment $M_1 M_2$ et ne rencontre pas $M_2 P$ (l'intersection de $M_3 N_3$ et de $M_2 N_2$ étant intérieure à ω et ne tombant pas, par conséquent, sur le segment $M_2 P$); elle coupera donc nécessairement le segment $M_1 P$ et, par suite, le segment MM_1. Une démonstration analogue fait voir qu'elle coupe nécessairement le segment $N_1 Q$ et, par conséquent, NN_1.

Par des raisonnements analogues nous obtenons une série de segments MN, $M_1 N_1$, $M_2 N_2$, $M_3 N_3$ .... où nous aurons soin de choisir toujours les notations de manière à ce que les points se trouvent situés sur l'arc dans l'ordre suivant:

$$MM_1 M_2 \ldots\ldots N_2 N_1 N,$$

et où nous saurons que la droite $M_n N_n$ coupera, pour tout indice $n \geqq 2$, les segments MM_1, $M_1 M_2$, $M_2 M_3$ ... $M_{n-2} M_{n-1}$ et NN_1, $N_1 N_2$ ... $N_{n-2} N_{n-1}$.

En supposant maintenant différents les points limites respectifs U et V des deux séries, on pourrait raisonner comme il suit: Les deux segments $M_n N_n$ et $M_{n+1} N_{n+1}$ devraient être, pour toute valeur de n, côtés opposés d'un quadrilatère convexe et l'arc $M_n N_n$ serait situé, par rapport à la droite $M_n N_n$, du même côté que le segment $M_{n+1} N_{n+1}$ et, par rapport à la droite $M_{n+1} N_{n+1}$, du même côté que le segment $M_n N_n$ (en faisant les mêmes abstractions que plus haut). Or, les deux côtés opposés $M_n N_n$ et $M_{n+1} N_{n+1}$ du quadrilatère convergeant nécessairement vers le segment UV, l'arc $M_n N_n$ convergerait également vers ce segment quand n croîtrait à l'infini, en d'autres termes: l'arc UV serait un segment de droite, ce qui n'est pas admissible. Il faut donc que les séries en question $MM_1 M_2$ ... et $NN_1 N_2$ ... aient un point limite commun, et un seul. Touchant ce point limite commun, U, nous allons démontrer qu'il est nécessairement un point d'ondulation. La situation du point U sur l'arc est la suivante:

$$MM_1M_2 \;\ldots\ldots\; U \;\ldots\ldots\; N_2N_1N.$$

La tangente en U est position limite de la droite M_nN_n, n croissant à l'infini (Théorème 8).

La droite M_nN_n rencontre les segments MM_1 et NN_1, M_1M_2 et N_1N_2 ... $M_{n-2}M_{n-1}$ et $N_{n-2}N_{n-1}$; par conséquent sa position limite, la tangente en U, rencontre également chacun des segments (en un point intérieur ou en un point limite). Il s'ensuit que la tangente contient un point au moins de chacun des arcs correspondants, MM_1 et NN_1, M_1M_2 et N_1N_2, etc., et comme deux quelconques de ces arcs n'ont pas de point commun à moins d'être consécutifs, la tangente en U aura une infinité de points en commun avec l'arc MN. Donc, U est un point d'ondulation. Nous voyons en outre que chacune des demi-tangentes en U a une infinité de points en commun avec l'arc considéré.

Et comme nous pouvons démontrer à l'aide d'un raisonnement analogue que tout arc contenu dans la courbe donnée contient nécessairement au moins un point d'ondulation, la courbe elle-même contiendra un ensemble partout dense de points d'ondulation. En ce qui concerne les courbes non fermées on pourra se servir du même raisonnement avec constructions successives de diagrammes, comme il à été indiqué ci-dessus. Donc:

Théorème 24. — Tout arc ordinaire ne contenant pas d'arc convexe présentera un ensemble partout dense de points d'inflexion et un ensemble partout dense de points d'ondulation.

Étant donné un arc ordinaire coupant une droite l en un nombre infini de points, tout point limite de ces derniers sera un point d'ondulation ayant l pour tangente. Par contre, un arc ordinaire n'ayant pas une infinité de points en commun avec une droite, ne contiendra pas de point d'ondulation et, d'après le théorème 24, un tel arc contiendra, dans chacun de ses intervalles, des arcs convexes. Que si nous supposons l'arc considéré construit par la représentation univoque et continue d'un segment PQ, les arcs convexes qu'il contient correspondront à des segments déterminés contenus dans PQ et formant, par conséquent, un ensemble dénombrable. Les arcs convexes indiqués formeront donc également un ensemble dénombrable. Donc:

Théorème 25. — Tout arc ordinaire n'ayant une infinité de points en commun avec aucune droite, se compose d'un ensemble fini ou dénombrable d'arcs convexes et des points limite de ceux-ci.

Il va sans dire que cet énoncé est vrai aussi pour tout arc ordinaire ne contenant pas de points d'ondulation, ou bien qui n'en contient qu'un ensemble nulle part dense sur l'arc.

Il résulte en outre du raisonnement ci-dessus qu'étant donné un arc ordinaire tel que chacun de ses points a au moins une demi-tangente qui n'a pas une infinité de points en commun avec l'arc, cet arc se composera d'un ensemble fini ou dénombrable d'arcs convexes.

La construction d'arcs contenant un ensemble partout dense de points d'inflexion et, partant, un ensemble partout dense de points d'ondulation n'est pas difficile; on n'a qu'à prendre un arc représenté dans un système de coordonnées rectangulaires par une équation de la forme $y = f(x)$, où $f(x)$ est une fonction réelle, uniforme, continue qu'on aura définie pour un interval déterminé et qui remplit cette condition que $f'(x)$ soit finie et déterminée pour toute valeur dans l'intervalle considéré tandis que $f''(x)$ n'existe pour aucune valeur de cet intervalle. Un tel arc ne peut pas contenir d'arc convexe car, d'après le théorème de Lebesgue, l'hypothèse contraire entraînerait qu'en général $f''(x)$ existât dans l'intervalle correspondant à l'arc convexe.

D'après ce qui précède tout arc ordinaire peut se construire par la combinaison d'arcs convexes formant un ensemble fini ou dénombrable et d'arcs nulle part convexes formant un ensemble fini ou dénombrable.

§ 8. Sur la variation de la tangente.

Toute tangente à un arc ordinaire est position limite d'une série de tangentes au même arc. Considérons en effet la tangente en A, a; elle est position limite des droites joignant A à une série de points sur l'arc, $A_1 A_2 \ldots.$, ayant A pour point limite. Or on pourra toujours trouver, sur l'arc AA_n, un point A'_n tel que sa tangente $a'_n \neq AA_n$, et comme la droite AA_n converge vers a et que a'_n est toujours $\neq AA_n$ en même temps qu'elle passe par un point A'_n convergeant vers A, a'_n aussi convergera nécessairement vers a, et la démonstration est faite.

Il est vrai qu'en règle générale il existera, en dehors de a, d'autres positions limites des séries de tangentes dont les points de contact forment une série ayant A pour point limite. Cependant, nous pouvons démontrer le théorème suivant:

Théorème 26. — Étant donné un arc AB, ordinaire en tous les points qui sont différents de A, et supposé qu'il existe une position limite déterminée, commune à toutes les tangentes dont les points de contact convergent vers A, cette position limite, a, sera tangente en A, et la tangente variera en A d'une façon continue.

En effet, si nous choisissons, sur l'arc $A_1 A_2 \ldots$, une série fondamentale au point limite A, on pourra trouver sur l'arc AA_n, un point A'_n tel que sa tangente $a'_n \neq AA_n$. a'_n aura une position limite déterminée quand n grandit indéfiniment. Or, la droite AA_n aura la même position limite; et le théorème est démontré.

A l'aide d'une transformation projective, ou bien en modifiant légèrement le texte de la démonstration, on verra que ce théorème s'applique également au cas où A est un point situé à l'infini. Donc: Étant donné un arc contenant un point situé à l'infini et supposé que tous les autres points de l'arc soient ordinaires, et que la tangente converge, en un point variable P de l'arc, vers une position limite déterminée, quand P converge vers A, — cette position limite sera asymptote de l'arc.

Théorème 27. — *Étant donnée une tangente à un arc ordinaire laquelle varie d'une façon continue en son point de contact P, cette tangente sera position limite de la droite de jonction de deux points Q et R convergeant sur l'arc vers P d'une manière arbitraire.*

En effet, il existe sur l'arc QR un point S dont la tangente $s \neq QR$, et du moment que Q et R convergent vers P, S y convergera également; s convergera alors vers la tangente en P et, par conséquent, la droite QR convergera vers cette tangente.

Supposons réciproquement un arc tel que la droite de jonction entre deux points variables de l'arc, Q et R, converge vers une position limite déterminée quand Q et R convergent, d'une manière arbitraire, vers un point déterminé, P, de l'arc, et supposons que la chose ait lieu pour tout point P de l'arc; alors l'arc sera nécessairement ordinaire et il aura, en chacun de ses points, une tangente variant de façon continue. En effet, les droites PQ et PR ont des positions limite déterminées de sorte que nous avons en P des demi-tangentes déterminées. Ces demi-tangentes sont nécessairement de sens contraires (voir la remarque de la page 448), donc P est un point ordinaire. Et la tangente doit varier de façon continue, car les sécantes de l'arc QR ayant une oscillation infiniment petite quand Q et R convergent vers P, la même chose doit être vraie pour les tangentes.

Tout arc ordinaire dont la tangente varie d'une façon continue ayant ceci de particulier que dans le voisinage d'un point P de l'arc l'oscillation des sécantes est infiniment petite, on pourra toujours délimiter autour de P un arc AB assez petit pour n'être coupé qu'en un point au plus par les droites d'une direction déterminée quelconque qui ne soit pourtant pas parallèle à la tangente en P. Dans un système de coordonnées XY où l'axe Y aura été choisi parallèle à la direction considérée, l'arc AB pourra être représenté par une équation de la forme : $y = f(x)$, où $f(x)$ sera uniforme et différentiable et où $f'(x)$ sera continue.

En choisissant deux points M et N non contenus dans la tangente en P et dont la droite de jonction ne passe pas par P, on pourra toujours délimiter, autour de P, un arc assez petit pour qu'aucune sécante de l'arc ne passe par M ni par N et tel que la droite MN ne le rencontre pas. En opérant, en M et en N, deux projections centrales des points de l'arc, on obtiendra deux faisceaux de droites correspondant d'une manière bi-univoque, d'où il résulte immédiatement que l'arc est rectifiable.

§ 9. Sur les sécantes limites de courbes de Jordan arbitraires.

Considérons, sur un arc de Jordan AB, un point intérieur P. Admettons préalablement que par P se laisse mener au moins une droite l n'ayant que le point P en commun avec une portion déterminée $P_1 P_1'$ de l'arc donné, laquelle portion d'arc contient P comme point intérieur. Supposons en outre que l divise l'arc $P_1 P_1'$ en deux parties distinctes PP_1 et PP_1' séparées par la droite. Si nous projetons l'arc PP_1 de P, les demi-droites projetantes rempliront un angle convexe situé tout entier d'un côté de l, en ce sens qu'il pourra toutefois être limité par l. Toute demi-droite issue de P et située à l'intérieur de cet angle convexe rencontrera l'arc PP_1 en une infinité de points ayant P pour point limite. De manière analogue on peut déterminer un ensemble de demi-droites par rapport à l'arc PP_1'. Les deux groupes de demi-droites s'appelleront respectivement les demi-tangentes de l'un ou de l'autre côté de l.

Prenons deux points Q et R situés sur l'arc chacun de son côté de P; faisons converger Q et R vers P; la droite QR aura nécessairement des positions limites comprises dans l'angle adjacent et supplémentaire de l'angle formé par les positions limite possibles des demi-droites PQ et PR. Les positions limite de QR s'appellent *sécantes limite* en P. Les sécantes limite en P se trouvent donc comprises dans l'angle complet le plus petit possible qui contienne les demi-tangentes de part et d'autre de l.

En adoptant, sur l'arc, un sens (positif) déterminé, chaque sécante QR aura un sens positif déterminé, correspondant au premier. Et chacune des sécantes limite aura également un sens positif.

Jusqu'ici nous avons supposé qu'il existait une droite l n'ayant qu'un point unique P en commun avec le voisinage de P et divisant ce voisinage en deux parties séparées par la droite. Au cas où une telle droite n'existerait pas, toute droite passant par P deviendrait sécante limite.

Étant donnée une droite l passant par un point P d'un arc AB et ayant le voisinage du point situé tout entier d'un même côté (abstraction faite du point contenu dans la droite), cette droite sera nécessairement une sécante limite. A l'aide de cette observation il est facile de généraliser les théorèmes 9 et 10 jusqu'à faire prendre à ce dernier la forme que voici:

Théorème 28. — Étant donné un arc plan AB situé dans un domaine convexe Ω, on pourra mener par tout point P du prolongement du segment AB au delà de Ω, une sécante limite de l'arc.

Il en résulte spécialement qu'étant donné un arc AB n'ayant que les points A et B en commun avec la droite AB, on pourra mener de chacun des points situés sur le prolongement du segment AB une sécante limite de l'arc.

Supposons maintenant donné un arc AB tel qu'il existe au moins un point O, situé dans le plan, par lequel il ne soit pas possible de mener une sécante limite de l'arc, et examinons la situation de l'arc par rapport à ce point.

Menons, de O, par l'un des points limite de l'arc, A, une demi-droite. Cette demi-droite ne sera pas une sécante limite; par conséquent, l'arc qui part de A sera, dans la première partie de son parcours, situé tout entier d'un même côté de la droite OA, et les sécantes limite orientées qui correspondent au sens AB sur l'arc, doivent être, en ce qui concerne A, orientées du même côté par rapport à OA; leurs orientations détermineront donc un même sens dans le plan autour du point O. La droite OA rencontre l'arc AB en un nombre fini de points (pour que le nombre fût infini il faudrait que OA fût sécante limite en tous les points limite des points de rencontre). Supposons qu'en parcourant l'arc dans le sens AB nous rencontrions, après A, un autre point d'intersection P_1 avec la droite OA. P_1 ne saurait être situé sur la demi-droite OA, car s'il l'était, l'arc AP_1 aurait, d'après le théorème 28, une sécante limite partant de O. Il faut donc que P_1 soit sur le prolongement du segment OA au delà de O. L'arc AP_1 et le segment AP_1 limitent un domaine Ω_1 formé par tous les segments qui joignent O aux points de l'arc AP_1, ces segments ayant en commun avec l'arc: un seul point limite et pas du tout de points intérieurs (théorème 28). Prenons un point Q de l'arc AP_1; la demi-droite OQ aura QA d'un côté et l'arc QP_1 de l'autre. Les sécantes limite orientées en Q, qui correspondent au sens AB, détermineront toujours, dans le plan autour de O, le même sens que déterminent les sécantes limites orientées au point de départ A. Prolongeons l'arc AP_1 au delà de P_1 jusqu'en une intersection suivante avec la droite OA_1; P_2 qui ne peut pas être sur la demi-droite OP_1, doit tomber sur la demi-droite OA soit entre O et A_1 soit sur le prolongement du segment OA au delà de A. Admettons le premier des deux cas (le second pouvant aisément être solutionné de façon analogue). L'arc P_1P_2, avec ses sécantes limite orientées, détermine, autour de O, le même sens que déterminait le premier arc considéré; conjointement avec le segment P_1P_2 il limite un domaine Ω_2 formé de segments joignant O aux points de l'arc. Ω_2 est séparé de Ω_1 par la droite OA. Si nous prolongeons l'arc au delà de P_2, le prolongement passera nécessairement dans le domaine Ω_1 où il se poursuivra jusqu'à ce qu'il arrive éventuellement à une nouvelle intersection P_3, située celle-là entre O et P_2, etc. Quant au parcours de l'arc, il tournera en spirale autour de O jusqu'en B. Les sécantes limite orientées qui correspondent au sens AB, détermineront toujours le même sens dans le plan autour de O. Nous pouvons donc énoncer ceci:

Théorème 29. — Étant donné un arc AB n'ayant pas de sécante limite passant par le point O, toutes les sécantes limite orientées qui correspondent à un sens déterminé sur l'arc, détermineront toujours le même sens dans le plan autour du point O. D'où:

Théorème 30. — Étant donné un arc orienté où deux sécantes limite orientées déterminent, aux points P et Q, des sens opposés dans le plan autour d'un point donné O, l'arc PQ aura nécessairement au moins une sécante limite passant par O.

De ce théorème nous pouvons faire une application spéciale et importante à l'arc ordinaire, où sécante limite et tangente sont synonymes.

En modifiant légèrement le raisonnement précédent on pourra l'appliquer au cas où le point O est situé à l'infini. On obtient alors le théorème suivant:

Théorème 31. — Les sécantes limite orientées d'un arc *orienté, forment un ensemble de directions tel que deux directions y figurant, toutes les directions intermédiaires y figureront*[1].

Une application très spéciale de ce théorème est représentée par la proposition bien connue énonçant que pour passer d'une de ses valeurs à une autre une fonction dérivée doit passer par toutes les valeurs intermédiaires[2].

De la recherche ci-dessus exposée il résulte en outre qu'étant donnée une courbe de Jordan n'ayant pas de sécantes limite passant par un point déterminé O, situé dans le plan, il faut, d'abord, que O soit à l'intérieur du domaine limité par la courbe, et, ensuite, que toute droite passant par O rencontre la courbe en deux points et en deux points seulement.

§ 10. Sur les courbes ayant un nombre fini de sécantes limite passant par chaque point du plan.

Un groupe de courbes particulièrement intéressant est celui des courbes n'ayant qu'un nombre fini de sécantes limite passant par chacun des points situés dans le plan. Cette propriété implique, comme nous allons le voir, une restriction remarquable de la notion de courbe. D'abord, il faut pour qu'elle ait lieu que tous les points de la courbe soient ordinaires, autrement un nombre infini de sécantes limite passeraient par chacun des points. Donc la courbe est ordinaire.

Ensuite, la tangente en chaque point P de la courbe doit varier d'une façon continue. La démonstration se fait à l'aide du théorème 31. Mettons en effet que la tangente ne varie pas de façon continue. On pourrait alors trouver dans le voisinage de P une série de tangentes n'ayant pas la tangente p en P pour position limite et ayant une autre position

[1] En disant qu'une direction est intermédiaire entre deux autres directions nous entendons exprimer ce fait qu'une demi-droite orientée dans la direction dite intermédiaire est comprise dans un angle convexe dont les côtés sont des demi-droites représentant les deux autres directions.

[2] Voir, par exemple, Lebesgue, Leçons sur l'Intégration, Paris 1904, p. 89.

limite p_1 passant par P_1. En supposant maintenant toutes les tangentes orientées conformément à un sens de parcours déterminé sur la courbe, p et p_1 seraient deux droites de sens déterminés (en tout cas on pourrait toujours prendre, parmi les tangentes ayant p_1 pour position limite, un ensemble de tangentes orientées ayant une position limite orientée déterminée). Or, d'après le théorème 31 il existerait alors, pour chaque direction intermédiaire, une infinité de tangentes parallèles à cette direction autour de P, ce qui serait en contradiction avec l'hypothèse d'après laquelle il passerait par chaque point un nombre fini de sécantes limite et, par conséquent, un nombre fini de tangentes. Il ne faut pas attacher de l'importance à ce fait que nous avons choisi un point à l'infini; nous aurions tout aussi bien pu choisir un point situé dans l'un des angles compris entre p et p_1 de sorte que les sens de parcours, autour du point indiqués par p et p_1 fussent contraires, — et appliquer ensuite le théorème 30.

Puis, nous allons démontrer que la courbe ne contient pas de point d'ondulation. En effet, si P était un point d'ondulation, l'une au moins des demi-tangentes en P aurait une infinité de points en commun avec le voisinage de P et on pourrait, d'après le théorème 10, mener une infinité de tangentes au voisinage de P, ce qui serait contraire à l'hypothèse admise.

Enfin on peut démontrer qu'au cas où la courbe ne contient pas de segment, la position limite de l'intersection entre la tangente en un point fixe P de la courbe et la tangente en un point mobile P_1 convergeant vers P, c'est le point P. On sait, en effet, que P_1 convergeant vers P suivant un sens déterminé sur l'arc, la tangente en P_1, orientée conformément à ce même sens finira toujours par déterminer le même sens dans le plan autour de P; autrement on pourrait, d'après le théorème 30, mener une infinité de tangentes de

P au voisinage de P. En outre, on peut trouver une série de tangentes telles que leur point de rencontre avec la tangente p en P converge vers P. On a recours pour cela au domaine convexe de l'arc PP_1, cet arc étant supposé situé tout entier d'un même côté de p (abstraction faite du point P). Ce domaine est nécessairement limité par un arc convexe partant de P et ayant, en P, la même demi-tangente que l'arc donné PP_1. L'arc convexe aura une infinité de points intérieur en commun avec l'arc donné de sorte que P sera point limite de ces points communs ; en tous ces points communs les deux arcs auront même tangente. En prenant donc, parmi ces points, une série fondamentale $Q_1 Q_2 \ldots .$ ayant P pour point limite, les tangentes en Q_1, $Q_2, \ldots$ couperont p en une série convergeant vers P. Si maintenant il était possible de choisir, sur l'arc donné PP_1, une série fondamentale $R_1 R_2 \ldots$ ayant P pour point limite et telle que les tangentes en R_1, $R_2, \ldots$ coupassent p en une série ne convergeant pas vers P mais vers un autre point limite S, il existerait un point T par lequel passerait une infinité de tangentes à l'arc PP_1. Choisissons en effet un point T sur le prolongement de PS au delà de S. Les tangentes orientées, en Q_n et en R_n, indiqueraient toujours, pour n supérieur à certaine valeur limite, des sens opposés autour de T, et nous aurions, passant par T, une infinité de tangentes à l'arc PP_1. Remarquons en outre que l'intersection entre la tangente fixe en P et la tangente mobile en P_1 finira par se maintenir d'un même côté de P.

Nous avons donc le théorème suivant:

Théorème 32. — Étant donné un arc plan ne contenant pas de segment, et posé le cas que le plan ne contienne pas de point par où passe une infinité de sécantes limites, l'arc donné est nécessairement un arc ordinaire. La tangente varie de façon continue en chacun des points de l'arc et l'intersection entre chaque tangente et la tangente consécutive coïncide tou-

jours avec le point de contact de la première des deux tangentes. L'arc est coupé par toute droite en un nombre fini de points et se compose par conséquent d'un nombre fini ou d'un ensemble dénombrable d'arcs convexes et de leurs points limites. Ajoutons que le voisinage d'un point arbitraire P sur l'arc est coupé par chacune des demi-droites issues de P en un point au plus qui diffère de P[1]. C'est là une conclusion qu'on peut tirer du fait qu'il n'est pas possible de mener une infinité de tangentes de P au voisinage de ce point.

L'arc ordinaire ayant un nombre fini de tangentes passant par chacun des points situés dans le plan est donc coupé par toute droite en un nombre fini de points. La réciproque n'est pas vraie; en choisissant par exemple sur un arc de cercle une série fondamentale monotone $P_1 P_2 \ldots.$ ayant P pour point limite, on pourra construire des arcs $P_1 P_2$, $P_2 P_3, \ldots$ inscrits aux segments de cercle que limitent les arcs de cercle $P_1 P_2$, $P_2 P_3$ .... et les cordes correspondantes, de manière à ce que chacun des arcs construits soit coupé par une droite arbitraire en un nombre fini déterminé ($\leqq k$) de points et que l'ensemble de ces arcs constitue un arc ordinaire. Il sera facile de disposer ces arcs de façon à ce qu'on puisse mener de P des tangentes à tous les arcs et, par conséquent, une infinité de tangentes à l'arc ordinaire ainsi déterminé qui, lui, ne pourra être coupé par une droite qu'en $2k$ points au plus, aucune droite ne pouvant couper plus de deux des segments de cercle en question. A l'aide de constructions analogues on démontre aisément que les arcs ordinaires coupés par une droite arbitraire en un nombre fini de points n'ont pas nécessairement partout des tangentes variant d'une façon continue.

Rattachons finalement au théorème 32 le théorème suivant:

[1] Cette propriété a été énoncée sous la forme d'un postulat général par v. Staudt (Geom. d. Lage, p. 74)

Théorème 33. — Étant donné un arc ordinaire n'offrant pas une série d'une infinité de tangentes parallèles entre elles, la tangente variera d'une façon continue en chaque point de l'arc, et l'arc lui-même sera nécessairement coupé par toute droite en un nombre fini de points.

Pour démontrer que la variation de la tangente est continue, on se servira de la même application du théorème 31 qui a été employée dans la partie correspondante de la démonstration du théorème 32. Que l'arc soit coupé par toute droite en un nombre fini de points, on peut l'inférer de ce fait que dans le voisinage d'un point d'ondulation il doit toujours y avoir une infinité de tangentes parallèles à la tangente du point.

Remarque finale.

Dans ce qui précède, nous n'avons considéré que des courbes situées dans une région bornée du plan, mais il va sans dire qu'à l'aide de transformations projectives nos définitions et théorèmes peuvent être immédiatement généralisés jusqu'à devenir valables pour le plan projectif tout entier. De là résulte ultérieurement que le principe de dualité s'applique à tous nos raisonnements, de sorte que les théorèmes dont nous venons de démontrer la validité par rapport aux courbes, se laissent traduire immédiatement en des théorèmes relatifs à des ensembles de droites dans le plan qui correspondent de façon bi-univoque et continue aux points d'une circonférence ou d'un arc de cercle. Des théorèmes sur les courbes et leurs tangentes se trouveront ainsi transformés en théorèmes sur les systèmes continus de droites et sur leurs points caractéristiques, c'est-à-dire sur les intersections des droites consécutives du système. Mais, en général, l'ensemble formé par de tels points caractéristiques ne sera pas continu et ne formera donc pas de courbe au sens propre du terme.

Des théorémes particulièrement intéressants sur ce genre de systèmes continus de droites s'obtiennent en appliquant le principe de dualité aux théorèmes 22, 25, 29, 30, 32. Nous nous dispenserons toutefois d'exposer ces développements dans le détail attendu que les applications en question n'offrent rien de nouveau au point de vue du principe.

Table des Matières.